www.estudar.com.vc

P1 2014.1 FGV Adaptada

Exercício 1a Assíntotas

Explicação

1.

a. Verifique se o gráfico da função

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{x^3}{4x - 8}}$$

Possui assíntotas horizontais e verticais. Em caso afirmativo, determine a equação de cada uma delas.

Vamos começar verificando se $g(x)$ possui **assíntotas verticais**.

Para isso, precisamos **calcular os limites laterais** $\lim_{x\to a^-} g(x)$ e $\lim_{x\to a^+} g(x)$, onde a equivale aos **pontos em que a função não está definida.**

Caso $\lim_{x\to a^-} g(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$, a função $x = a$ vai ser assíntota vertical.

Precisamos, então, achar onde $g(x)$ não está definida. Como o numerador de g é um polinômio, com domínio definido em todos os reais, precisamos ver apenas o denominador.

Sabemos que o denominador não pode ser 0, então:

$$4x - 8 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

Ou seja, $g(x)$ está definida em todo os reais menos em $x = 2$.

Calculando os limites laterais de $g(x)$ com $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3}{4x-8}$$

O denominador nesse limite vai tender a 0 enquanto o numerador vai tender a 8.

Mas, sabemos que x está tendendo a 2 pela esquerda, isto é, por números menores que 2, então o **denominador do limite vai ser sempre menor que $\mathbf{0}$**. E esse limite vai resultar em $-\infty$.

Com o limite lateral direito, podemos utilizar um raciocínio semelhante, a diferença é que aqui x tende a 2 pela direita, ou seja, por números maiores que 2.

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3}{4x-8}$$

Isso significa que o **denominador vai ser sempre maior que $\mathbf{0}$**. Então, como o numerador tende a 8, esse limite vai resultar em $+\infty$.

Dado que $\lim_{x\to 2^-} g(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 2^+} g(x) = +\infty$, podemos concluir que $\boldsymbol{x = 2}$ é **assíntota vertical** da função $g(x)$.

Agora, vamos verificar as **assíntotas horizontais**. Faremos isso calculando $\boldsymbol{\lim_{x\to -\infty} g(x)}$ **e** $\boldsymbol{\lim_{x\to +\infty} g(x)}$. Caso pelo menos um desses limites, não tenda a $\pm\infty$, teremos assíntota horizontal.

Começando por $\boldsymbol{\lim_{x\to -\infty} g(x)}$:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{4x-8}$$

Se tentarmos substituir x por $-\infty$ vamos cair em uma **indeterminação** do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Então vamos manipular um pouco esse limite.

Dividindo em cima e embaixo por x, vamos ter:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x}}{\frac{4x}{x} - \frac{8}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4 - \frac{8}{x}}$$

Lembrando que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{c}{x} = 0$ para qualquer c real, teremos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4 - \frac{8}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{4 - 0} = +\infty$$

Podemos calcular $\mathbf{lim}_{x\to+\infty}\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ de forma semelhante:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{4x - 8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4 - \frac{8}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{4 - 0} = +\infty$$

Como ambos os limites tendem a ∞, concluímos que **não existem assíntotas horizontais**.

Resposta esperada: Assíntota vertical: $x = 2$; não existem assíntotas horizontais.