



[www.estudar.com.br](http://www.estudar.com.br)

# Cálculo II

## Pontos Críticos, Máximos e Mínimos

### Lista de Exercícios





## 1. Pontos Críticos

*Elaboração Própria*

Determine os pontos críticos das seguintes funções:

- $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 + 5x - 12$
- $f(x, y) = (\cos x)^2 + \sin y$
- $f(x, y, z) = x^2 + 2xz + (y - 1)^2$

## 2. Hessiano e Teste da Segunda Derivada

*Elaboração Própria*

- Calcule o Hessiano da função  $f(x, y) = x^3 + 3y^5 - 5xy + 5$ .
- Encontre os pontos críticos da função  $f(x, y)$  acima.
- Classifique os pontos críticos encontrados.

## 3. Máximos e Mínimos Locais

*P3 2013 - Questão 3 - Adaptada*

Dada a função  $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ :

- Determine quais são os pontos críticos de  $f$ ;
- Classifique os pontos críticos de  $f$ .

## 4. Máximos e Mínimos Locais

*P3 2014 - Questão 1 - Adaptada*

Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y$ .

- Determine quais são os pontos críticos de  $f$ ;
- Classifique os pontos críticos de  $f$ .



## 5. Máximos e Mínimos Locais

P3 2015 - Questão 3 - Adaptada

Seja a função  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ .

- Determine quais são os pontos críticos de  $f$ ;
- Classifique os pontos críticos, justificando, quanto a máximo local, mínimo local ou sela.

## 6. Máximos e Mínimos Locais

P3 2016 - Questão 2 - Adaptada

Considere a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = kx^3 + x^2 + 2y^2 - 4x - 4y$ , onde  $k$  é um número real não nulo.

- Para que valores de  $k$  a função  $f$  possui exatamente dois pontos críticos?
- Classifique os dois pontos críticos de  $f$  obtidos no item anterior.

## 7. Máximos e Mínimos Locais

P3 2012 - Questão 2 - Adaptada

Seja  $f(x, y) = 3ye^x - e^{3x} - y^3$ .

- Encontre os pontos críticos de  $f$ ;
- Classifique os pontos críticos de  $f$ .



## Gabarito

1.

a.  $(-\frac{5}{4}, 0)$

b.  $(0, \frac{\pi}{2}), (0, \frac{3\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), (\pi, \frac{\pi}{2}), (\pi, \frac{3\pi}{2}), (\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

c.  $(0, 1, 0)$

2.

a.  $360xy^3 - 25$

b.  $(0, 0)$  e  $(3 * (\frac{5}{27})^{\frac{4}{7}}, (\frac{5}{27})^{\frac{1}{7}})$

c.  $(0, 0)$  é ponto de sela e  $(3 * (\frac{5}{27})^{\frac{4}{7}}, (\frac{5}{27})^{\frac{1}{7}})$  é mínimo local.

3.

a.  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$

b.  $(0, 0)$  é ponto de sela e  $(1, 1)$  é mínimo local.

4.

a.  $(2, 1), (2, -1), (-2, 1)$  e  $(-2, -1)$

b.  $(2, -1)$  e  $(-2, 1)$  são pontos de sela,  $(2, 1)$  é mínimo local e  $(-2, -1)$  é máximo local.

5.

a.  $(0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  e  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

b.  $(0, 0)$  é ponto de sela e  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  e  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  são mínimos locais.



6.

a.  $k > -\frac{1}{12}, k \neq 0$

b.  $\left(\frac{-1-\sqrt{1+12k}}{3k}, 0\right)$  é ponto de sela e  $\left(\frac{-1+\sqrt{1+12k}}{3k}, 0\right)$  é mínimo local.

7.

a. (0,1)

b. Ponto de máximo