



www.estudar.com.br

Cálculo II

Funções de Três ou Mais Variáveis

Lista de Exercícios





1. Gradiente e Plano Tangente

Elaboração Própria

Seja a superfície S dada pela equação $z^2 + 2xyz + 2y^2 - x^2 = 3$. Determine:

- Um vetor ortogonal à superfície, passando pelo ponto $P = (1,0,2)$;
- O plano tangente ao ponto $P = (1,0,2)$.

2. Interseção de Superfícies

Elaboração Própria

Seja $C: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + 2y^2 = 4, x + y + 2z = 0\}$.

- Determine uma reta tangente a C , em um ponto genérico (x_0, y_0, z_0) .
- Encontre os pontos nos quais a reta tangente é paralela ao plano $x + y - z = 1$.

3. Interseção de Superfícies

P3 2013 - Questão 1 - Adaptada

Seja S a superfície de equação $2xy - 2y^2 + z^2 + 6z = 1$.

- Encontre o plano tangente a S no ponto $(-4, -1, -1)$.
- Considere a curva $C: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + 4y^2 = 1, 2x + 4y = z^2 \text{ e } z < 0\}$. Determine os pontos de C nos quais a reta tangente é paralela ao plano encontrado no item (a).
- Encontre uma parametrização para a intersecção da superfície S com o plano $x = 3y$.



4. Plano Tangente à Superfície de Nível

P3 2016 - Questão 1 - Adaptada

Determine todos os pontos da superfície de nível 1 da função

$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ em que seu plano tangente é paralelo ao plano $2x + y - 3z = 2$.

5. Superfície de Nível

P3 2014 - Questão 3 - Adaptada

Seja a superfície S dada pela equação $x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 10 = 0$.

- Existe apenas um ponto A na superfície S tal que a reta normal a S e a A contém os pontos $(3, 0, 4)$ e $(1, -2, 0)$. Determine o ponto A .
- Sejam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciáveis com $\nabla f(-2, -1) = (b, 1)$. Suponha que a imagem de γ é a intersecção do gráfico de f com a superfície S , dada no item (a), e que o ponto $P = (-2, -1, -2)$ pertence à imagem de γ . Determine b de modo que os planos tangentes ao gráfico de f e à S sejam ortogonais no ponto P .
- Dê uma equação da reta tangente à Im_γ no ponto P .



Gabarito

1.

a. $(-2, 4, 4)$

b. $2x - 4y - 4z + 6 = 0$

2.

a. $(x_0, y_0, z_0) + \lambda(8y_0, -4x_0, 2x_0 - 4y_0)$

b. $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{6}}{2}\right) e \left(\frac{-2\sqrt{6}}{3}, \frac{-\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

3.

a. $x + 2y - 2z + 4 = 0$

b. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

c. $\left(\frac{3\sqrt{10}}{2} \cos t, \frac{\sqrt{10}}{2} \cos t, \sqrt{10} \sin t - 3\right)$

4. $\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) e \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

5.

a. $(2, -1, 2)$

b. $b = 3$

c. $(-2, -1, -2) + \mu(-1, 7, 4)$