



www.estudar.com.vc

Cálculo II

Regra da Cadeia

Lista de Exercícios





1. Regra da Cadeia com Uma Variável Independente

Elaboração Própria

Seja $f = x^2y^2 + 2xy^3$, com $x = e^t$ e $y = \cos t$, determine $\frac{df}{dt}$ quando $t = 0$.

2. Regra da Cadeia com Duas Variáveis Independentes

Elaboração Própria

Seja $z = \cos x e^y$, com $x = st$ e $y = s^2 + t^2$, determine:

- $\frac{\partial z}{\partial s}(s, t)$;
- $\frac{\partial z}{\partial t}(s, t)$.

3. Versão Geral da Regra da Cadeia

Elaboração Própria

Seja $w = x^5 + y^3z^2$, com $x = rst$, $y = r^2 + s^2 + t^2$, e $z = rs^2 \sin t$, determine $\frac{dw}{dr}$ quando $r = 2, s = 1$ e $t = 0$.

4. Diferenciação Implícita

Elaboração Própria

Dada a equação $x^4 + x^2y^2 + z^2 = 36$. Calcule:

- $\frac{\partial z}{\partial x}$;
- $\frac{\partial z}{\partial y}$.



5. Regra da Cadeia - Elaborado

P2 2016 - Questão 2 - Adaptada

Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 em \mathbb{R}^2 , tal que

$$f(t^2 + t, t + 1) = t^2 + 2t + 1, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Sabendo-se que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,2) = 1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,2) = 2$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(2,2)$.

6. Regra da Cadeia - Elaborado

P2 2014 - Questão 3 - Adaptada

Seja $G = G(x, y)$ uma função de classe \mathcal{C}^2 em \mathbb{R}^2 e considere $F = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(s, t) = sG(st, -s).$$

Em termos das derivadas parciais de G , calcule:

- $\frac{\partial F}{\partial s}(s, t)$;
- $\frac{\partial F}{\partial t}(s, t)$;
- $\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(s, t)$;

7. Regra da Cadeia - Elaborado

P2 2012 - Questão 4 - Adaptada

Sejam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, uma função de classe \mathcal{C}^2 e $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$F(t, u) = t^2 f(t^2 u, 5t + 3u).$$

Calcule:

- $\frac{\partial F}{\partial t}(1,2)$ em termos de f e de suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial t}(1,2)$ em termos de f e de suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.



8. Regra da Cadeia - Elaborado

P2 2015 - Questão 2 - Adaptada

Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, uma função de classe \mathcal{C}^2 e seja

$$g(u, t) = f(u^2 - t^2, 2ut).$$

Em termos das derivadas parciais de f :

a. Calcule $\frac{\partial g}{\partial u}$

b. Calcule $\frac{\partial g}{\partial t}$

c. Calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$

d. Calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$

e. Determine o valor de $r > 0$ para que a igualdade

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, t) + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(u, t) = 48 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2 - t^2, 2ut) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2 - t^2, 2ut) \right]$$

seja válida para todo $(u, t) \in \mathbb{R}^2$ com $u^2 + t^2 = r^2$.



Gabarito

1. 4
2.
 - a. $e^{s^2+t^2} (2s \cos(st) - t \sin(st))$
 - b. $e^{s^2+t^2} (2t \cos(st) - s \sin(st))$
3. 0
4.
 - a. $-\frac{2x^3+xy^2}{z^2}$
 - b. $-\frac{x^2y}{z^2}$
5. $-\frac{15}{2}$
6.
 - a. $G(st, -s) + s \left[t \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} \right]$
 - b. $s^2 \frac{\partial G}{\partial x}$
 - c. $2s \frac{\partial G}{\partial x} + s^2 \left[t \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} \right]$
7.
 - a. $2f(2,11) + 4 \frac{\partial f}{\partial x}(2,11) + 5 \frac{\partial f}{\partial y}(2,11)$
 - b. $4 \frac{\partial f}{\partial x}(2,11) + 6 \frac{\partial f}{\partial y}(2,11) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,11) + 15 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,11) + 17 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,11)$



8.

a. $2u \frac{\partial f}{\partial x} + 2t \frac{\partial f}{\partial y}$

b. $-2t \frac{\partial f}{\partial x} + 2u \frac{\partial f}{\partial y}$

c. $2 \frac{\partial f}{\partial x} + 4u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 8ut \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

d. $-2 \frac{\partial f}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 8ut \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

e. $r = \sqrt{12}$