www.estudar.com.vc

Exercício 6

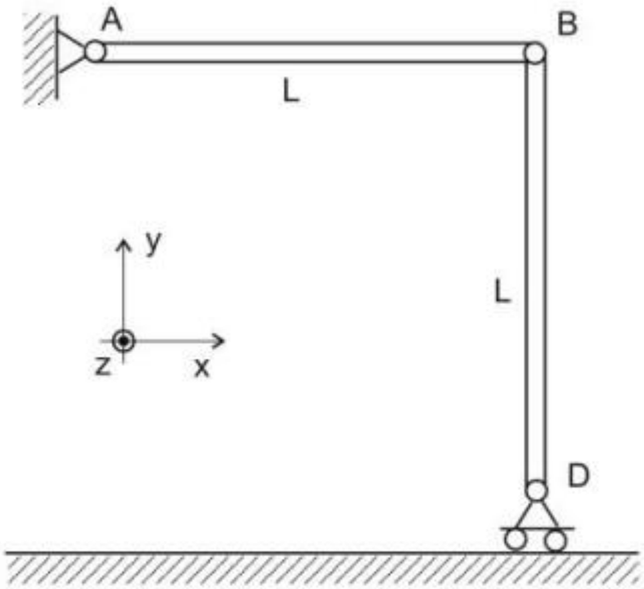
Mecânica A

Fuja do Nabo LIVE P3 2018.2

6. Dinâmica do Corpo Rígido

P3 2015.2 Mecânica A Poli-USP, Questão Discursiva 2

Duas barras uniformes, cada uma de massa m e comprimento L, estão articuladas em B como mostra a figura. Este sistema está num plano vertical, o pronto D da barra BD pode escorregar sem atrito no plano horizontal, e o ponto A da barra AB está preso por uma articulação externa.



Desloca-se levemente o ponto D para a esquerda, soltando-o em seguida, fazendo com que o sistema entre em movimento. Para o instante em que o ponto D estiver exatamente abaixo de A, pedem-se, em função dos dados:

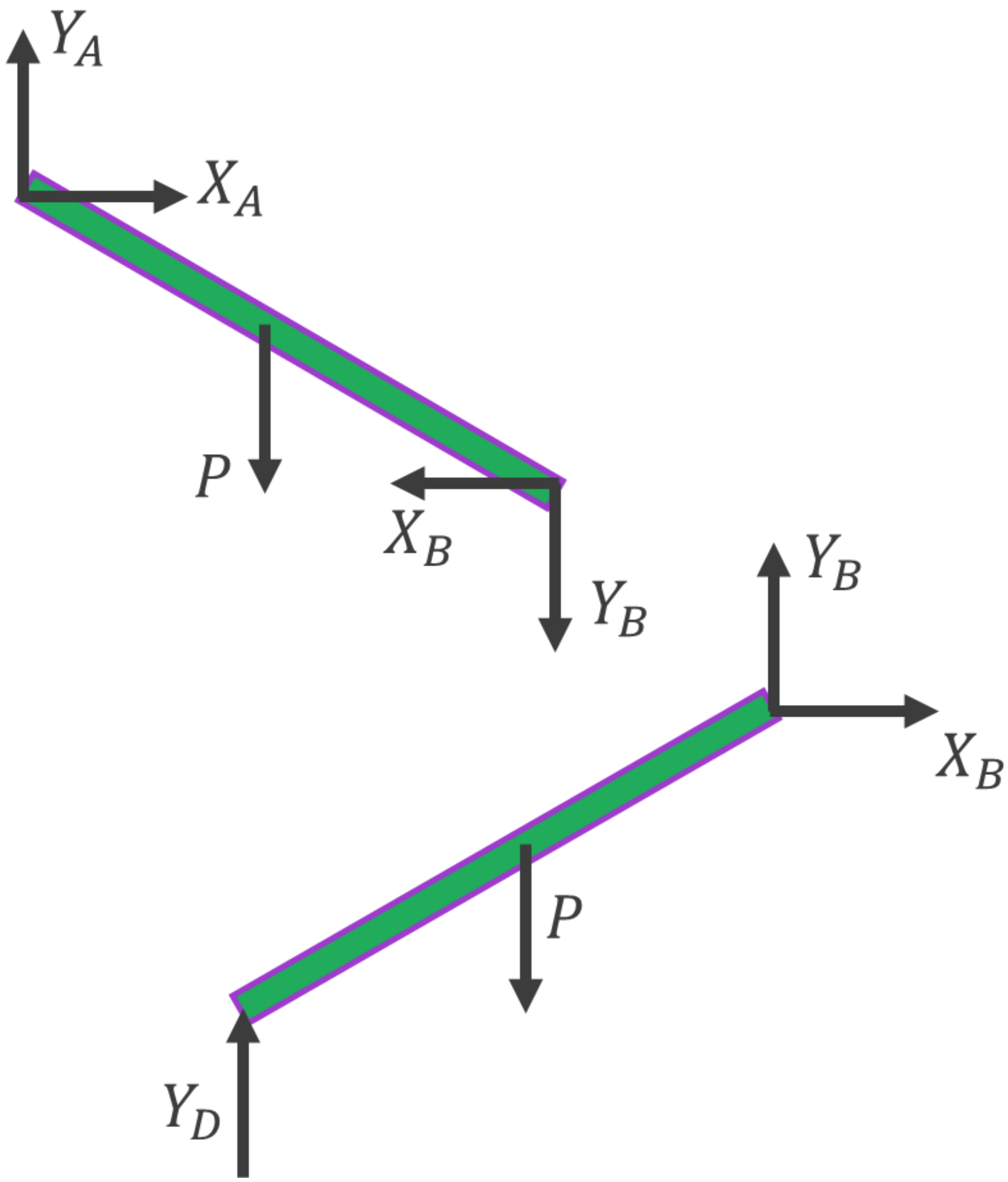
a. Construa os diagramas de corpo livre das barras AB e BD

b. Obtenha a relação entre os vetores rotação $\vec{\omega}_{AB}$ e $\vec{\omega}_{BD}$;

c. Obtenha a expressão da velocidade $\vec{v}_D$ do ponto D.

Resolução:

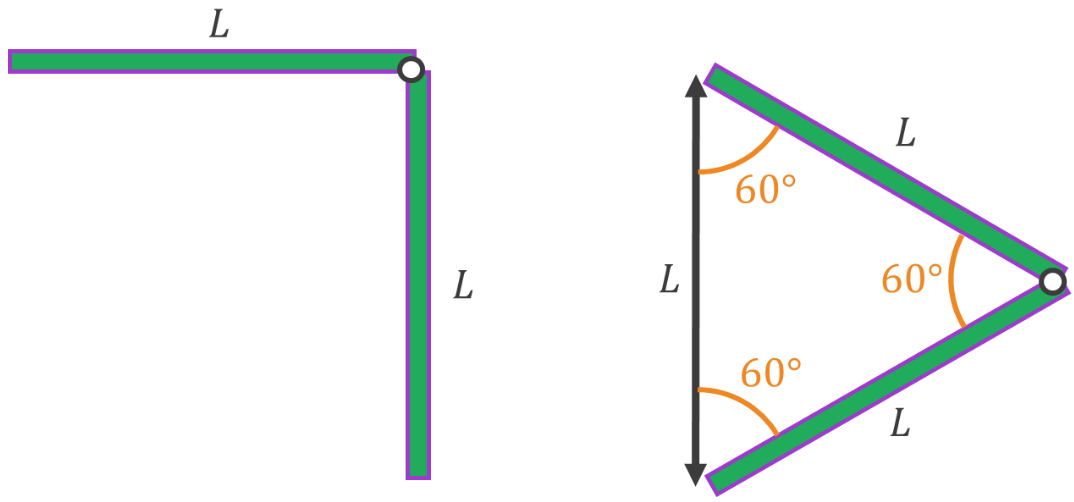
a.



Vale lembrar que as duas forças pesos são iguais (barras de mesma massa), o apoio simples D aplica uma força unicamente vertical (movimento horizontal livre) e as articulações A e B aplicam forças nas duas direções (movimento plano) e permitem rotação.

b.

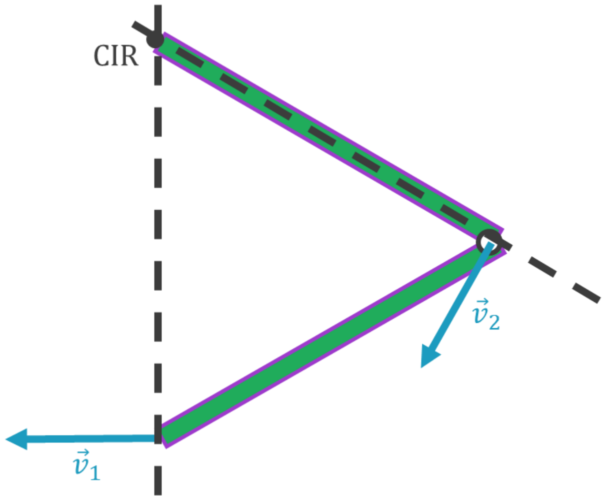
Para o instante considerado, vamos precisar ver como está a situação. O esquema geométrico da situação pode ser visto abaixo:



Como pôde ser visto, no instante considerado, a figura forma um triângulo equilátero.

Para encontrar a relação entre as velocidades angulares, precisamos estabelecer condições cinemáticas. Nesse sentido, vamos pensar, por exemplo, que a velocidade na articulação B é a mesma nas duas extremidades da barra.

Nesse sentido, vamos procurar o centro de rotação de cada barra. O centro da barra AB é a articulação fixa A. O centro da barra CD é um centro instantâneo de rotação, e pode ser encontrado usando as velocidades do ponto D e B de direções conhecidas (horizontal e perpendicular a AB, respectivamente).



Como pode ser visto, o CIR **nesse instante de tempo** coincide com o ponto A. Isso quer dizer que nesse instante, as duas barras giram juntas em torno do mesmo ponto A.

Mais do que isso, como a velocidade na articulação B que une as duas barras é a mesma para a barra AB e BC, podemos usar a lei do campo de velocidades para as duas barras:

$$AB: \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge (B - A)$$
$$BC: \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{BC} \wedge (B - A)$$

Como a velocidade $\vec{v}_A$ para as duas barras são iguais (ambas nulas por serem centro de rotação) e $\vec{v}_B$ também, vamos ter:

$$\vec{\omega}_{AB} \wedge (B - A) = \vec{\omega}_{BC} \wedge (B - A)$$

Como as velocidades angulares são perpendiculares ao plano dessa dela, então devemos ter, necessariamente:

$$\boxed{\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega}_{BC} = \omega\vec{k}}$$

c.

Para esse item, podemos lembrar que o sistema é conservativo, visto que só a força peso realiza trabalho nesse sistema. Nesse caso, podemos usar o teorema da energia cinética:

$$\Delta K = \tau$$

E como a energia cinética inicial é aproximadamente nula, temos que:

$$K = \tau$$

Como temos movimento de rotação pura das duas barras em relação ao mesmo centro de rotação (um fixo e outro instantâneo), podemos usar a forma simplificada da energia cinética:

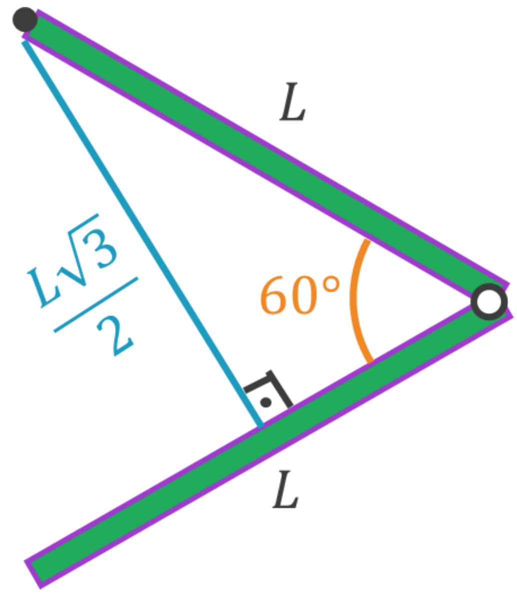
$$K = \frac{J_{A_z}\omega^2}{2}$$

Em que J_{A_z} é o momento de inércia em relação ao eixo de rotação do corpo. O momento de inércia da barra AB é do tipo:

$$J_{A_z}^{AB} = \frac{mL^2}{3}$$

O que pode ser calculado com o teorema dos eixos paralelos (ver questão 5). O momento de inércia da barra BC em relação ao eixo que passa por A deve ser calculado pelo Teorema de Steiner.

Para isso, devemos achar a distância entre o baricentro e o ponto A (CIR). Isso pode ser feito pela geometria do triângulo equilátero abaixo:



E assim, pelo teorema de Steiner, temos:

$$J_{A_z} = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{5mL^2}{6}$$

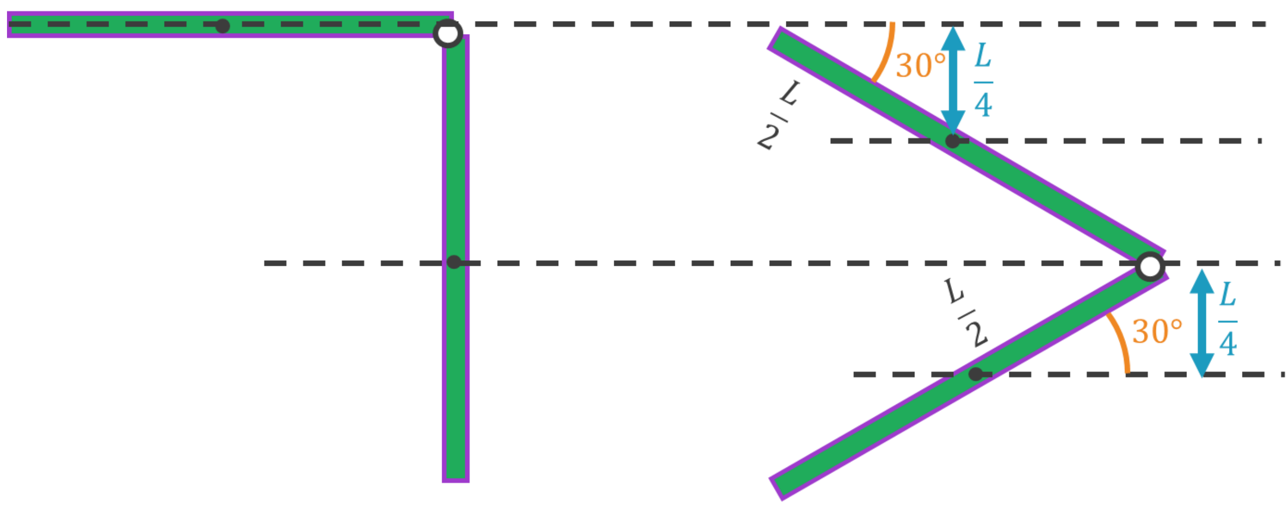
Assim, a energia cinética do sistema vira:

$$K = \frac{J_{A_z}^{AB}\omega_{AB}^2}{2} + \frac{J_{A_z}^{BC}\omega_{BC}^2}{2}$$

Usando $\omega_{AB} = \omega_{BC}$ e os momentos de inércia calculados, temos:

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{3}\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{5mL^2}{6}\right)\omega^2 = \frac{7m\omega^2L^2}{12}$$

Agora precisamos calcular o trabalho da força peso de cada barra. Para isso, precisamos saber em quanto cada baricentro desceu de altura. Por isso, usamos a geometria, representada abaixo:



Nesse caso, cada baricentro desceu em $\frac{L}{4}$. E o trabalho total é:

$$\tau = mg\frac{L}{4} + mg\frac{L}{4} = mg\frac{L}{2}$$

E, por fim, chegamos em (pelo TEC):

$$\frac{7m\omega^2L^2}{12} = mg\frac{L}{2}$$

Isolando ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{7L}}$$

As barras giram no sentido horário, o que leva à representação vetorial:

$$\vec{\omega} = -\sqrt{\frac{6g}{7L}}\vec{k}$$

E para encontrar a velocidade $\vec{v}_D$, usamos o campo de velocidades:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (D - A)$$

Nesse caso $\vec{v} = \vec{0}$ e $(D - A) = -L\,\vec{j}$. Então:

$$\vec{v}_D = \left(-\sqrt{\frac{6g}{7L}}\vec{k}\right) \wedge (-L\,\vec{j})$$

O que nos leva à resposta final:

$$\boxed{\vec{v}_D = -\sqrt{\frac{6gL}{7}}\vec{i}}$$