www.estudar.com.vc

Exercício 5

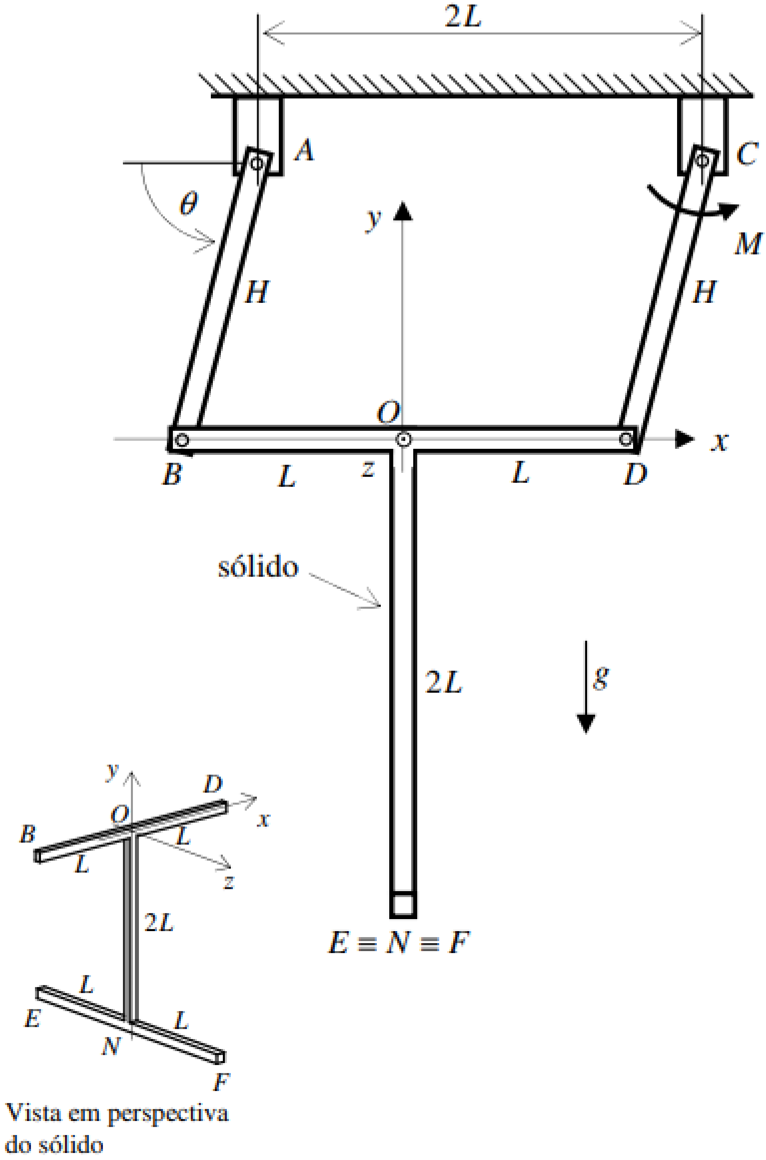
Mecânica A

Fuja do Nabo LIVE P3 2018.2

5. Dinâmica do Corpo Rígido

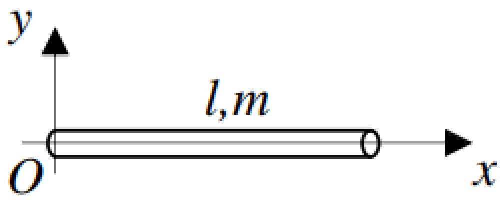
P3 2017.2 Mecânica A Poli-USP, Questão Discursiva 1

Um sólido de massa total m é formado pela junção das barras BD, ON e EF, homogêneas, idênticas, perpendiculares entre si, de complimento $2L$ e dimensões transversais desprezíveis, conforme mostra a figura. As barras AB e CD são ambas de comprimento H e massas desprezíveis. Considere movimento plano em planos paralelos a O_{xy}, devido a pinos com eixos na direção de O_z em A, B, C e D (conexões sem atrito).



No instante inicial, na posição $\theta = 0°$, o sistema é abandonado do repouso, sujeito ao próprio peso e à aplicação simultânea de um momento M que se mantém constante.

Dado:



$$J_{Oy} = \frac{ml^2}{3}$$

a. Determine o momento de inércia J_{oz} e o produto de inércia $J_{O_{xz}}$ do sólido.

b. Expresse a energia cinética do sistema em função de $\dot{\theta}$ e o trabalho das forças que atuam no sistema em função de θ.

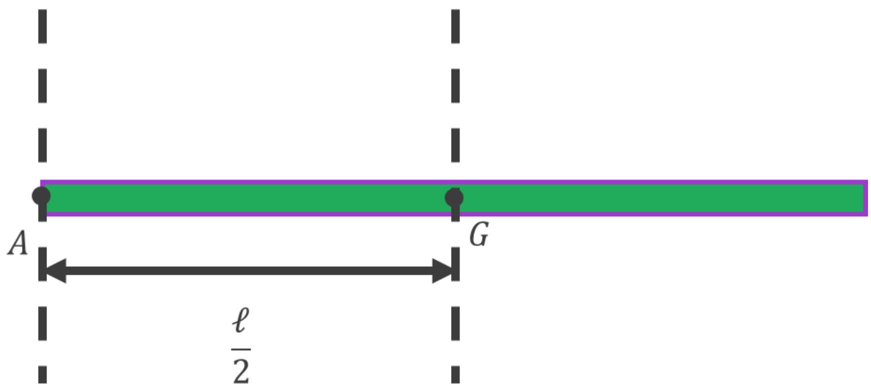
c. Expresse a velocidade angular $\dot{\theta}$ em função de θ e a equação de movimento do sistema (a expressão de $\ddot{\theta}$).

Resolução

a.

O momento de inércia fornecido no enunciado **não é** o baricêntrico, isto é, o polo em que foi calculado não foi o baricentro da barra.

Vamos encontrar o momento de inércia baricêntrico fazendo o "procedimento inverso" do teorema dos eixos paralelos:



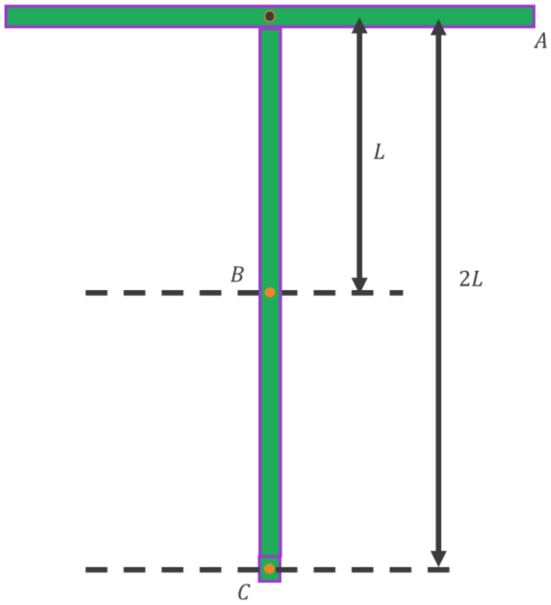
Pelo teorema dos eixos paralelos, temos:

$$J_{A_y} = J_{g_y} + md_{AG}^2$$

Com os dados do enunciado e da figura acima, temos:

$$\frac{m\ell^2}{3} = J_{G_z} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

Chegando em $J_{g_y} = \frac{m\ell^2}{12}$. A partir desse momento de inércia, podemos calcular o das outras barras. Para isso, vamos calcular ver o diagrama frontal do corpo em questão.



Vamos calcular o momento de inércia das barras A, B, e C identificadas na figura.

O momento de inércia da barra A é o próprio momento de inércia baricêntrico calculado anteriormente, visto que o eixo passa pelo centro de massa perpendicular à barra. Nesse caso, dado que a barra tem massa M:

$$J_{A_z} = \frac{M\ell^2}{12}$$

O momento de inércia da barra B é o próprio momento de inércia fornecido no enunciado (em relação à extremidade). Nesse caso, temos:

$$J_{B_z} = \frac{M\ell^2}{3}$$

O momento de inércia da barra C não é fornecido. Nesse caso vamos precisar calculá-lo a partir do Teorema de Steiner.

Devemos lembrar, antes, que como a barra possui espessura desprezível, a massa dela está toda contida no eixo longitudinal da barra. Isso quer dizer que o momento de inércia baricêntrico da barra C é nulo ($J_{C_z}^G = 0$). Nesse caso, pelo teorema de Steiner:

$$J_{C_z} = J_{C_z}^G + Md^2$$

Como a distância entre a barra C e o eixo z definido é ℓ, temos:

$$J_{C_z} = M\ell^2$$

E o momento de inércia total é a soma dos três momentos de inércia:

$$J_{O_z} = \frac{M\ell^2}{12} + \frac{M\ell^2}{3} + M\ell^2 = \frac{17M\ell^2}{12}$$

No entanto, o enunciado não fornece a massa das barras, e sim do sistema. Considerando que as 3 barras possuem mesma massa, temos $m = 3M$. Além disso, o tamanho de cada barra é $\ell = 2L$. Nesse caso:

$$\boxed{J_{O_z} = \frac{17mL^2}{9}}$$

Quanto ao produto de inércia, vamos ter:

Barra A: O produto $J_{A_{xz}}$ é nulo pois ela está contida no eixo x, e as coordenadas z de todos os seus pontos são nulas ($J_{A_{xz}} = \int x \underbrace{z}_{0} \, dm = 0$).

Barra B: Analogamente à barra A, a barra B está contida no eixo y e também possui coordenadas z nulas. Nesse caso $J_{B_{xz}} = 0$.

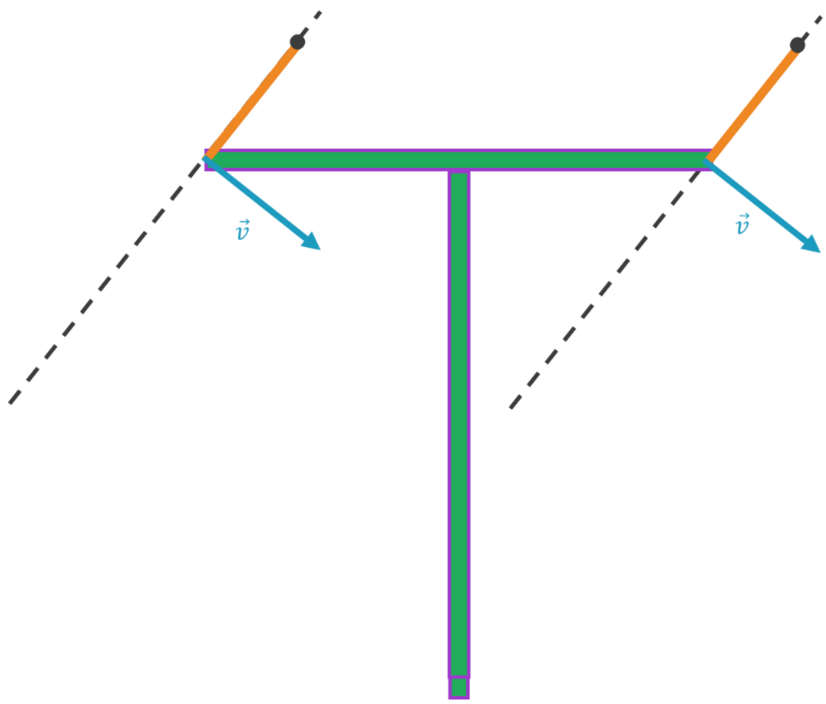
Barra C: Nesse caso, as coordenadas em z não são nulas, mas as em x são. Por isso $J_{C_{xz}} = 0$.

E o produto de inércia total é dado pela soma dos produtos de inércia. Logo:

$$\boxed{J_{O_{xz}} = 0}$$

b.

A dificuldade desse item é deduzir o movimento que o corpo em questão faz. Nesse caso, vamos traçar duas velocidades que a gente conhece, que no caso são as velocidades das barras de massa desprezível sobre o corpo:



Tratam-se de velocidades em direções perpendiculares às barras de tamanho H. E pela simetria do problema, as direções, sentidos e intensidades são iguais ($\vec{v}$).

Como no corpo há dois pontos com mesma velocidade, trata-se de um movimento de **translação**. E corpos rígidos em translação possuem a energia cinética simplificada:

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

Já que não já o termo de rotação ω. Agora, precisamos encontrar a velocidade em função de $\dot{\theta}$. Da relação de movimento circular, o módulo da velocidade na extremidade da barra com velocidade angular $\dot{\theta}$, temos:

$$|\vec{v}| = \left|\dot{\theta}\right| \cdot H$$

Nesse caso, temos então:

$$\boxed{K = \frac{m\dot{\theta}^2 H^2}{2}}$$

Já em relação ao trabalho, as cargas externas que realizam trabalho são o binário M e a força peso mg. O trabalho do binário constante é conhecido e dado em função de $\Delta\theta = \theta$, visto que o ângulo inicial é nulo. Assim:

$$\tau_M = M\theta$$

Já em relação à força peso, precisamos conhecer a variação de altura em função de θ. Pela geometria das barras H, a variação de altura (para baixo) em relação à θ é:

$$\Delta h = H\sin(\theta)$$

E o trabalho da força peso fica:

$$\tau_p = mgH\sin(\theta)$$

E o trabalho total é a soma dos trabalhos. Nesse caso:

$$\boxed{\tau = mgH\sin(\theta) + M\theta}$$

c.

Pelo teorema da energia cinética, temos:

$$\Delta K = \tau$$

Nesse caso vamos ter:

$$\frac{m\dot{\theta}^2 H^2}{2} = mgH\sin(\theta) + M\theta$$

Isolando $\dot{\theta}$:

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g\sin(\theta)}{H} + \frac{2M\theta}{mH^2}}}$$

Já a equação do movimento, podemos partir da equação obtida pelo teorema da energia cinética e derivar ambos os lados em relação ao tempo:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{\theta}^2H^2}{2}\right] = \frac{d}{dt}[mgH\sin(\theta) + M\theta]$$

Sabendo que θ (e consequentemente $\dot{\theta}$) é uma função do texto e que o resto é constante, podemos usar a regra da cadeia:

$$\frac{df[\theta(t)]}{dt} = \frac{df}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

Nesse caso, vamos ter:

$$\frac{mH^2}{2}2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \dot{\theta}[mgH\cos(\theta) + M]$$

Simplificando, temos:

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{h}{H}\cos\theta + \frac{M}{mH^2}}$$