www.estudar.com.vc

Resumo e Lista de Exercícios

Mecânica A

Fuja do Nabo LIVE P3 2018.2

RESUMO

1. Dinâmica do Ponto

a. Quantidade de Movimento Linear

A quantidade de movimento linear, ou momento linear, é definida pelo produto da massa pelo vetor velocidade linear $\vec{v}$.

$$\vec{Q} = m\vec{v}$$

b. Segunda Lei de Newton

A Segunda Lei de Newton diz que a soma de todas as forças externas a um ponto material é o produto da massa pelo vetor aceleração.

$$\vec{F} = \dot{\vec{Q}} = m\vec{a}$$

c. Trabalho

O trabalho é uma grandeza escalar e definido pelo produto escalar entre a força atuante e o deslocamento de um corpo, conforme integral abaixo.

$$\tau = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

d. Energia Cinética

A energia cinética é definida pelo produto da massa vezes a velocidade em módulo ao quadrado dividido por dois,

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

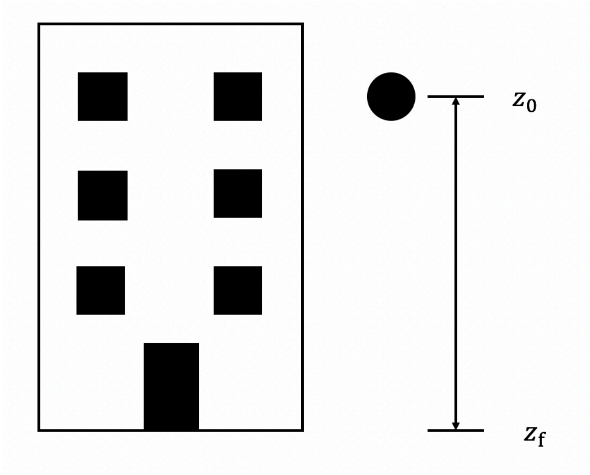
O Teorema da Energia Cinética diz que o trabalho total realizado sobre o corpo é a variação da energia cinética.

$$\tau = \Delta T$$

d. Trabalho da Força Peso

Dado que um corpo sofre uma queda de uma altura de z_0 até uma altura z_f com relação a uma mesma referência, o trabalho da força peso será dado por:

$$\tau = mg(z_0 - z_f)$$

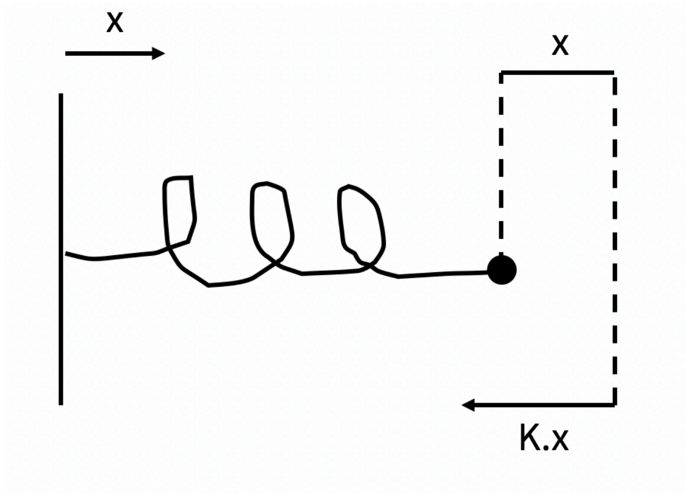


Isso vem do fato da energia potencial gravitacional ser do tipo $U = mgz$, e que o trabalho pode ser escrito como $\tau = -\Delta U$.

e. Trabalho da Força Peso

Dado uma mola ideal que segue a Lei de Hooke $F = -k\Delta x$, o trabalho realizado pela força elástica é dado em função da sua posição inicial x_0 e posição final x_1, ambas em relação à posição de equilíbrio em que a força elástica é nula.

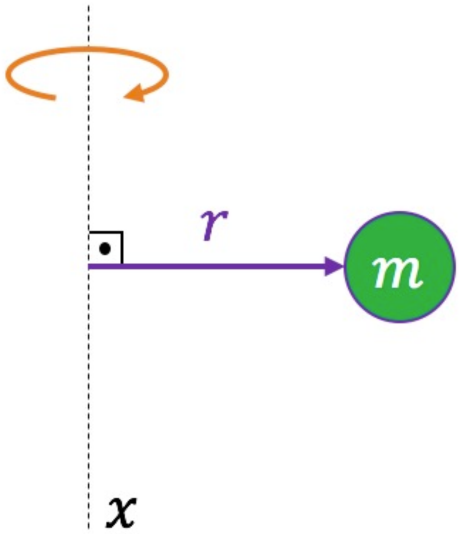
$$\tau = \frac{K}{2}(x_0^2 - x_1^2)$$



1. Dinâmica do Corpo Rígido

a. Momento de Inércia

O momento de inércia mede a dificuldade de rodar um corpo em torno de um eixo. Para um ponto material de massa m e distância até o eixo x de r (ilustrado abaixo):



Seu momento de inércia em relação ao eixo x é:

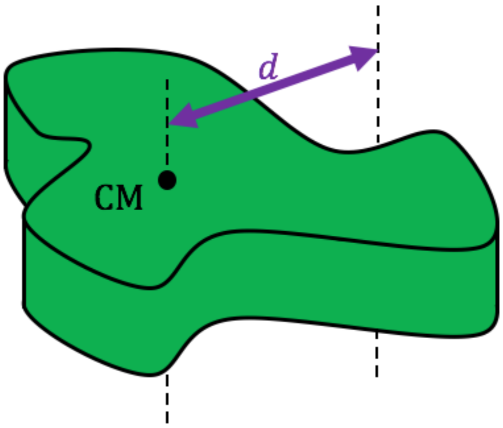
$$J_x = mr^2$$

E caso seja um sistema de massas, o momento de inércia desse sistema é a soma de todos os momentos de inércia em relação ao **mesmo eixo**.

$$J_x = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

I. Teorema dos Eixos Paralelos

Caso a gente possua o momento de inércia que passa pelo centro de massa de um sistema, podemos achar o momento de inércia em relação a um eixo qualquer **paralelo** ao eixo definido anteriormente.



Para isso, basta dizer que:

$$J = J_{cm} + md^2$$

Sendo m a massa total do sistema e d a distância entre os dois eixos.

II. Teorema dos Eixos Perpendiculares

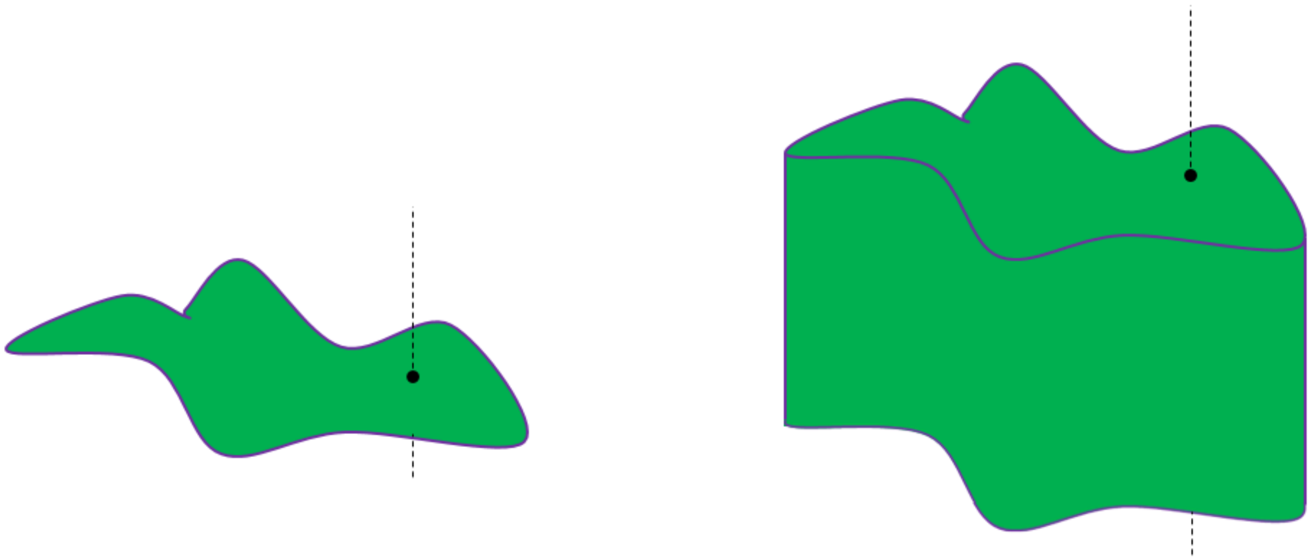
Caso o corpo seja **plano**, podemos usar o teorema dos eixos perpendiculares, que nos diz que:

$$J_z = J_x + J_y$$

Sendo J_{xx} e J_{yy} os momentos de **inércia** de eixos perpendiculares **contidos no plano do corpo** e I_{zz} o eixo que parte da mesma origem dos dois eixos anteriores e que seja perpendicular ao plano.

III. Teorema do Estiramento

Dados dois corpos, um plano e prismático reto de mesma secção, **caso eles possuam mesma massa**, eles possuirão o **mesmo momento de inércia** em relação a um eixo que passa na mesma posição no plano da secção.



Exemplo: disco e cilindro.

IV. Momentos de Inércia

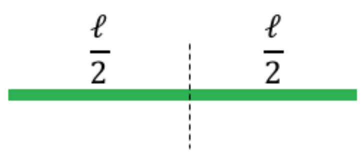
O momento de inércia de um corpo rígido é dado pelas integrais:

$$J_{xx} = \int (y^2 + z^2)dm \quad J_{yy} = \int (x^2 + z^2)dm \quad J_{zz} = \int (y^2 + x^2)dm$$

Em que se define um sistema de coordenadas xyz para calcular os momentos de inércia. O primeiro deles é em relação ao eixo x, o segundo em relação ao eixo y e o terceiro em relação ao eixo z.

Na avaliação, é raro cobrar o cálculo de um momento de inércia a partir de integrais. Em geral, é dado o momento de inércia baricêntrico de um corpo e usa-se o teorema dos eixos paralelos para encontrar o momento de inércia em outro polo.

Alguns momentos de inércia de corpos rígidos homogêneos em relação a eixos que passam pelo centro de massa são:

Corpo Rígido	Eixo	J_{cm}
Barra Delgada		$\frac{m\ell^2}{12}$
Aro/Casca Cilíndrica	No eixo de simetria	mR^2
Disco/Cilindro	No eixo de simetria	$\frac{mR^2}{2}$

Todos esses momentos de inércia são dados no formulário da prova, caso seja necessário usar em algum exercício.

b. Produto de Inércia

O **produto de inércia** mede a anti-simetria da distribuição de massa de um corpo em relação a um par de eixos e em relação ao seu baricentro. Em termos matemáticos, eles são definidos pelas integrais, a partir das coordenadas x, y e z adotadas,

$$J_{xy} = \int xy\, dm$$

$$J_{xz} = \int xz\, dm$$

$$J_{yz} = \int yz\, dm$$

Os casos mais interessantes são quando os produtos de inércia zeram, que são eles:

I. Se um dos planos (xy, xz ou yz) é um plano de simetria, então o produto de inércia em relação aos dois outros planos é nulo. Por exemplo, no caso plano, xy é plano de simetria, logo $J_{xz}\ e\ J_{yz}$ serão nulos

II. No caso particular de um corpo plano contido em um dos planos coordenados. Por exemplo, se um disco estiver no plano xy, as coordenadas de todos os seus pontos vão estar em $z = 0$, ou seja, $J_{xz} = J_{yz} = 0$.

III. Se o corpo possui um eixo de simetria, ou seja, todo plano que o contém é plano de simetria, então: $J_{XZ} = J_{YZ} = J_{XY} = 0$. Estes, calculados em relação ao baricentro.

De maneira análoga ao teorema dos eixos paralelos do momento de inércia, ao se definir um novo sistema de coordenadas $x'y'z'$ com eixos paralelos à uma definida no baricentro xyz e comparar os produtos de inércia, vamos ter:

$$J'_{xy} = J_{xy} + mx'y'$$

$$J'_{xz} = J_{xz} + mx'z'$$

$$J'_{yz} = J_{yz} + my'z'$$

As coordenadas $x'y'z'$ nas fórmulas são as coordenadas da origem do novo sistema de coordenadas em relação às coordenas originais definidas no baricentro

c. Matriz de Inércia

A matriz de inércia é uma matriz simétrica que contém os momentos de inércia na diagonal principal e os produtos de inércia negativos nos elementos secundários da matriz:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

Essa matriz aparece principalmente nas expressões do Teorema do Momento Angular e na forma geral da Energia Cinética. O aprofundamento de estudos de movimentos que a envolve em sua forma completa é visto em mecânica II.

d. Teorema do Movimento do Baricentro (TMB)

Analogamente à Segunda Lei de Newton para pontos materiais, temos o chamado TMB, que diz que a resultante de forças externas de um sistema é igual ao produto da massa pela aceleração do baricentro G do sistema. Em outras palavras:

$$\vec{R} = m\vec{a}_G$$

Esse sistema pode ser um sistema de partículas soltas, um corpo rígido, ou até mesmo um sistema com diversos corpos rígidos!

e. Teorema do Momento da Quantidade de Movimento (TMQM)

Também chamado de Teorema da Quantidade de Momento Angular (TQMA), esse teorema relaciona o momento calculado em qualquer polo com as grandezas cinemáticas. Ele é dado por:

$$\vec{M}_O = m(G - O) \wedge \vec{a}_O + \frac{d}{dt}\left([\vec{\imath} \quad \vec{\jmath} \quad \vec{k}][J_O]\{\vec{\omega}\}\right)$$

Para o nível de mecânica I é cobrado apenas o caso de movimentos planos de corpos que estejam contidos no plano xy e têm o eixo z perpendicular ao movimento. Nesse caso, o TQMA simplificado vira:

$$\vec{M}_O = m(G - O) \wedge \vec{a}_o + J_{O_z}\dot{\omega}_z\vec{k}$$

Ou seja, o uso da matriz de inércia é simplificada para o uso apenas do momento de inércia.

Em geral, os melhores polos para serem adotados são os que anulam o primeiro termo, por exemplo: **baricentro** $(G - G) = \vec{0}$, e **centro fixo de rotação** $\vec{a}_O = \vec{0}$**.**

f. Teorema da Energia Cinética

Para corpos rígidos:

$$\Delta T = T_F - T_i = \tau$$

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + m\vec{v}_0 \cdot \big(\vec{\omega} \times (G - O)\big) + \frac{1}{2} \{\omega\}_{1x3}^{t} [J_O]_{3x3} \{\omega\}_{3x1}$$

Como o resultado é o mesmo para qualquer ponto, logo, vamos escolher pontos que facilitem as contas e adotar movimento plano ($\omega_x = \omega_y = 0$). Dentre eles, podemos escolher:

I. O é um ponto fixo, ou seja, $\vec{v}_0 = 0$

$$T = \frac{1}{2} \{\omega\}_{1x3}^{t} [I_O]_{3x3} \{\omega\}_{3x1}$$

E para movimentos planos, em que temos apenas ω_z:

$$T = \frac{J_{O_z} \omega^2}{2}$$

II. Baricentro ($O = G$):

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{J_{G_z} \omega_z^2}{2}$$

III. Translação pura ($\vec{\omega} = 0$)

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2$$

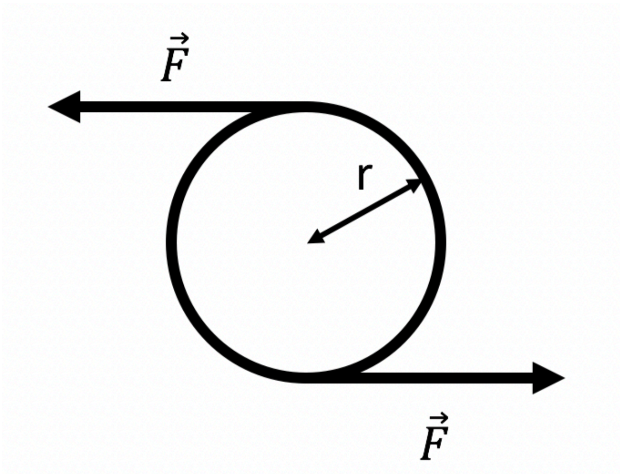
g. Alguns Trabalhos

I. Força de Atrito

Sem escorregamento → $\tau_{Fat} = 0$

Com escorregamento → $\tau_{Fat} < 0$

II. Trabalho do Momento Constante



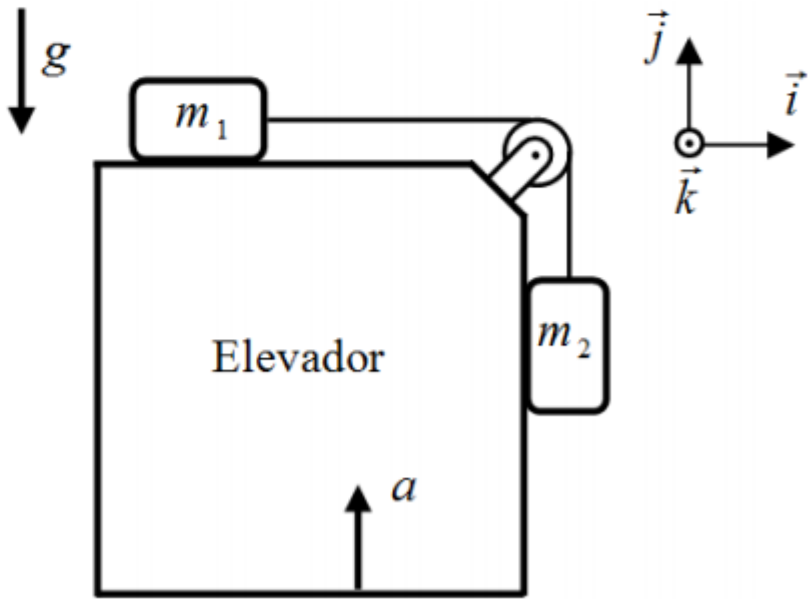
$$\tau = M\Delta\theta$$

Lista de Exercícios

1. Dinâmica do Ponto

P3 2016.1 Mecânica A Poli-USP, Questão Discursiva 2

Os blocos de massa m_1 e m_2 estão ligados por um cabo ideal, em um elevador cuja aceleração é $\vec{a} = a\vec{j}$, conhecida. A polia tem massa desprezível, e não há atrito na articulação. Também não há atrito entre os blocos e as superfícies com as quais estão em contato.

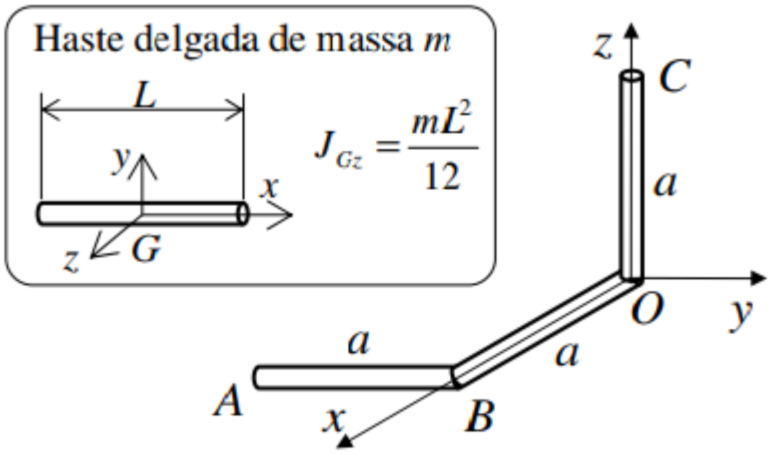


a. Desenhe os diagramas de corpo livre de cada bloco.
b. Calcule a tração T no cabo.

2. Inércia

P.Sub 2013.2 Mecânica A 1 Poli-USP, Questão Discursiva 1

O sólido é composto por três barras homogêneas de mesma massa m, mesmo comprimento a e diâmetro desprezível, soldadas entre si no formato mostrado na figura.



A barra AB é paralela ao eixo O_y. Usando o sistema de coordenadas O_{xyz}, determine:

a. O momento de inércia J_{Oz} do sólido.
b. O produto de inércia J_{Oxy} do sólido.

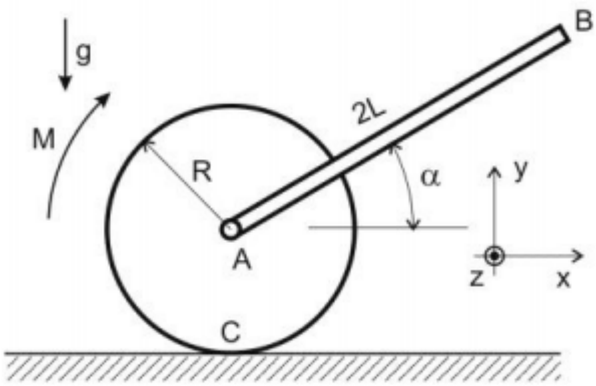
3. Dinâmica do Corpo Rígido

P3 2015.2 Mecânica A Poli-USP, Questão Discursiva 3

O disco homogêneo de centro A, massa $2m$ e raio R está ligado por uma articulação ideal (em A) à barra homogênea AB, que possui massa m e comprimento $2L$.

O disco rola sem escorregar sobre o plano horizontal, e deseja-se aplicar a este disco um binário $\vec{M}$, como indicado na figura, de modo que o ângulo

α, entre a direção da barra e a horizontal, permaneça constante. Pedem-se, em função dos dados do problema (m, R, L, α e g):



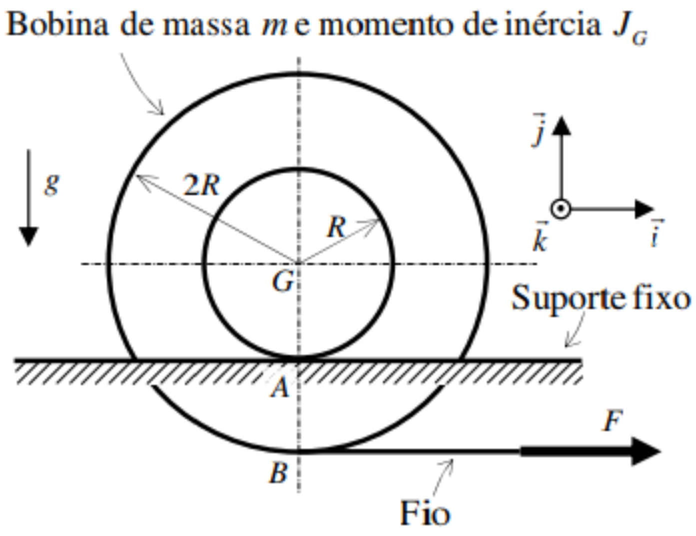
a. Construa os diagramas de corpo livre da barra e do disco;
b. Considerando a barra, determine a aceleração do ponto A necessária para que o ângulo α permaneça constante;
c. Obtenha as componentes das forças atuantes no ponto A da barra AB;
d. Determine a aceleração angular do disco;
e. Obtenha as forças reativas no ponto C do disco em contato com o solo;
f. Determine o binário $\vec{M}$ a ser aplicado ao disco.

4. Dinâmica do Corpo Rígido

P1 2017.2 Mecânica A Poli-USP, Questão Discursiva 3

Considere uma bobina com um fio ideal enrolado conforme mostra a figura. O raio de enrolamento é $2R$ e o raio de rolamento é R. Não há escorregamento entre a bobina e o suporte fixo, e nem entre a bobina e o fio.

No instante inicial o sistema está em repouso e é aplicada no fio uma força $\vec{F} = F\vec{\imath}$, com $F\ > 0$, conhecida. Para esse instante:



a. Desenhe o diagrama de corpo livre da bobina
b. Determine a aceleração $\overrightarrow{a_g}$ do centro de massa da bobina em função de F e dos parâmetros do sistema.
c. Em função da resposta do item anterior, o fio irá enrolar ou desenrolar?
d. Determine o máximo valor de F tal que não haja escorregamento, considerando que o coeficiente de atrito entre a bobina e o suporte fixo é μ.

5. Dinâmica do Corpo Rígido

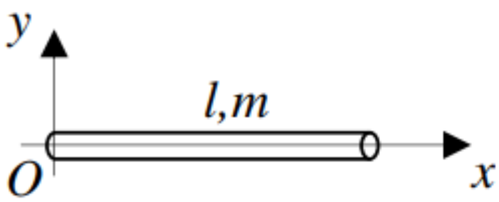
P3 2017.2 Mecânica A Poli-USP, Questão Discursiva 1

Um sólido de massa total m é formado pela junção das barras BD, ON e EF, homogêneas, idênticas, perpendiculares entre si, de complimento $2L$ e dimensões transversais desprezíveis, conforme mostra a figura. As barras AB e CD são ambas de comprimento H e massas desprezíveis.

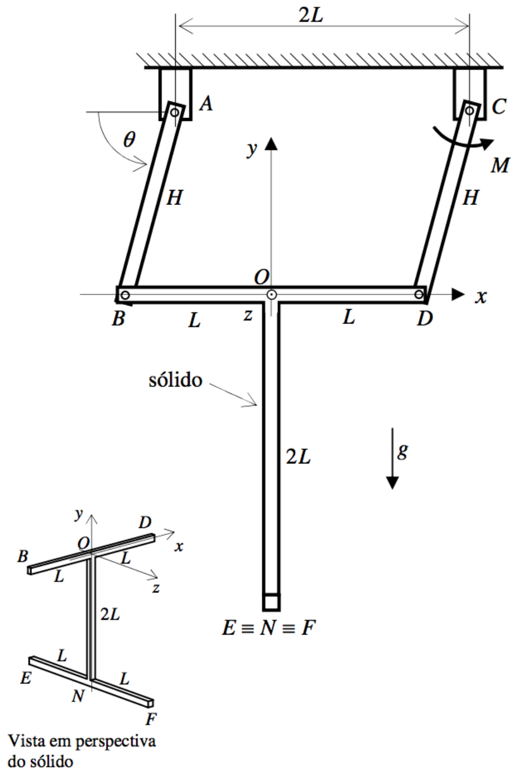
Considere movimento plano em planos paralelos a O_{xy}, devido a pinos com eixos na direção de O_z em A, B, C e D (conexões sem atrito).

No instante inicial, na posição $\theta = 0°$, o sistema é abandonado do repouso, sujeito ao próprio peso e à aplicação simultânea de um momento M que se mantém constante.

Dado:



$$J_{Oy} = \frac{ml^2}{3}$$



a. Determine o momento de inércia J_{oz} e o produto de inércia O_{xz} do sólido.

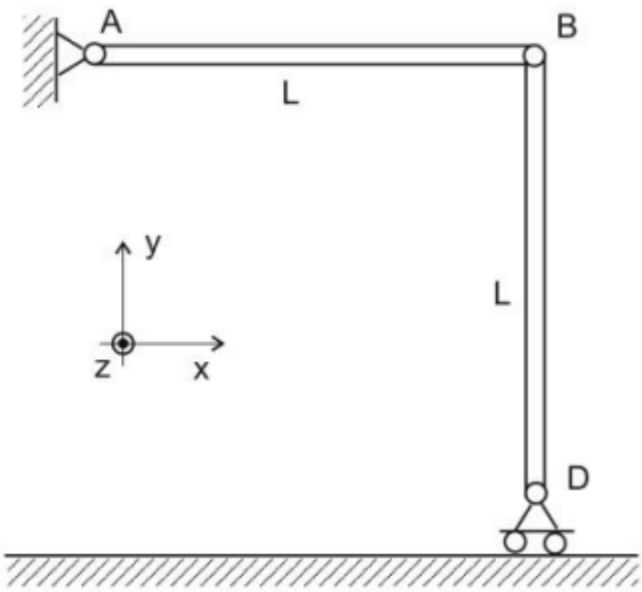
b. Expresse a energia cinética do sistema em função de $\dot{\theta}$ e o trabalho das forças que atuam no sistema em função de θ.

c. Expresse a velocidade angular $\dot{\theta}$ em função de θ e a equação de movimento do sistema (a expressão de $\ddot{\theta}$).

6. Dinâmica do Corpo Rígido

P3 2015.2 Mecânica A Poli-USP, Questão Discursiva 2

Duas barras uniformes, cada uma de massa m e comprimento L, estão articuladas em B como mostra a figura. Este sistema está num plano vertical, o pronto D da barra BD pode escorregar sem atrito no plano horizontal, e o ponto A da barra AB está preso por uma articulação externa.



Desloca-se levemente o ponto D para a esquerda, soltando-o em seguida, fazendo com que o sistema entre em movimento. Para o instante em que o ponto D estiver exatamente abaixo de A, pedem-se, em função dos dados:

a. Construa os diagramas de corpo livre das barras AB e BD
b. Obtenha a relação entre os vetores rotação $\overrightarrow{w_{AB}}$ e $\overrightarrow{w_{BD}}$;
c. Obtenha a expressão da velocidade $\overrightarrow{v_D}$ do ponto D.