www.estudar.com.vc

Resumo e Lista de Exercícios

Probabilidade

Fuja do Nabo LIVE P3 2018.2

Resumo

1. Métodos de Contagem

Os Métodos de Contagem permitem contar o número de elementos de um determinado conjunto, **de forma indireta** (ou seja, sem somar elemento por elemento).

a. Permutação

A permutação ocorre quando há, dentro de um conjunto, elementos que são **trocados** entre si.

A equação abaixo identifica quantas formas **diferentes** o conjunto pode assumir, tendo em vista as trocas ocorridas. Se n é o número de elementos **diferentes** do conjunto, a permutação desses n elementos é:

$$P_n = n!$$

Note que, se houverem k elementos repetidos no conjunto, a permutação deverá **descontar** as trocas entre tais elementos, ou seja:

$$P_{n,k} = \frac{n!}{k!}$$

b. Arranjos

O arranjo é utilizado quando temos um conjunto com N elementos e queremos saber quantos **subconjuntos** diferentes (com n elementos) podemos formar (desde que $n < N$).

A **ordem dos elementos no subconjunto importa** (por exemplo, um subconjunto $\{A; B\}$ é diferente de um subconjunto $\{B; A\}$). O número de arranjos de um conjunto com N elementos, tomados n a n, é:

$$A_{N,n} = (N)_n = \frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1)\dots(N-n+1)$$

c. Combinação

A combinação é utilizada na mesma situação dos arranjos, mas a **ordem dos elementos no subconjunto não importa**. Por exemplo, um subconjunto $\{A; B\}$ e um subconjunto $\{B; A\}$ são iguais.

Desta forma, a combinação de N elementos, n a n (pode-se ler também como "N escolhe n") será:

$$C_{N,n} = \binom{N}{n} = \frac{(N)_n}{P_n} = \frac{(N)_n}{n!} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

2. Probabilidades

a. Probabilidade da União

A Probabilidade da União é utilizada para calcular a probabilidade de um **evento A e um evento B ocorrerem** em uma mesma ocasião. Essa probabilidade é calculada como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

b. Probabilidade Condicional

A Probabilidade Condicional é utilizada para calcular a probabilidade de um evento A ocorrer, **dado que outro evento B já ocorreu**.

Por isso, essa probabilidade é dada pela **razão** entre a probabilidade da ocorrência da **intersecção** dos eventos, pela probabilidade de **somente o evento B** ocorrer:

$$P(\, A \mid B \,) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

c. Regra da Multiplicação para $P(A \cap B)$:

Por conta da regra acima, a probabilidade da ocorrência da **intersecção entre dois eventos A e B** é:

$$P(A \cap B) = P(\, A \mid B \,) \cdot P(B) = P(\, B \mid A \,) \cdot P(A)$$

d. Independência

Dois eventos A e B são ditos **independentes** se a ocorrência de um não interfere na ocorrência de outro.

Por isso, a probabilidade de ocorrer A dado que ocorreu B é, simplesmente, a probabilidade de ocorrer A:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

Ou seja, a probabilidade da ocorrência da intersecção entre os eventos é:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

e. Teorema da Probabilidade Total

O Teorema da Probabilidade Total diz que a probabilidade de um evento B ocorrer é a **soma** da probabilidade de todas as intersecções do próprio evento B com as partições do evento A (A_i):

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

f. Teorema de *Bayes*

Sejam dois eventos A e B, e A_i uma partição do evento A. De acordo com o **Teorema de *Bayes***, a seguinte relação é verdadeira:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(B)}$$

Ou, usando o Teorema da Probabilidade Total:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B \mid A_n)}$$

g. Probabilidade Complementar

Considere um evento A e seu complemento, A^C, tal que a união dos eventos gera o espaço amostral S:

$$A \cup A^C = S$$

A probabilidade do evento complementar A^C ocorrer é:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

3. Variáveis Aleatórias Discretas

Uma Variável aleatória é **discreta** se ela é **enumerável** (ou seja, podemos listar cada valor que a variável pode assumir, por exemplo, x_1, x_2, até um x_n, que é o valor final assumido).

Variáveis aleatórias discretas podem progredir até o infinito, de forma que a lista de valores continua indefinidamente.

a. Distribuição de Probabilidade

A probabilidade de a variável aleatória X assumir um valor x, dentro de um espaço amostral S (cujos elementos são s) é:

$$P[X = x] = P\ (para\ todos\ s \in S : X(s) = x)$$

b. Distribuição Acumulada

A distribuição acumulada considera a possibilidade da variável aleatória X assumir qualquer valor **menor ou igual** a um x.

Isso é dado pela **somatória** de todas as probabilidades em que X assume valores y, para todo $y \leq x$:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y:\ y \leq x} P[X = y]$$

c. Propriedades

A probabilidade da variável aleatória X assumir um valor x está entre 0 (no mínimo) e 1 (no máximo):

$$0 \leq P[X = x] \leq 1$$

Além disso, a soma de todas as probabilidades em que X assume valores x, para todos os x dentro do espaço amostral S, é 1:

$$\sum_{todos\ os\ possíveis\ x} P[X = x] = 1$$

4. Variáveis Aleatórias Contínuas

Uma variável aleatória X é **contínua** se os valores que ela pode assumir pertencem a um **intervalo** (ou seja, existem infinitas possibilidades de valores x que ela pode assumir, desde que pertençam a esse intervalo).

a. Densidade de Probabilidade

Para as variáveis aleatórias contínuas, fala-se em **função densidade de probabilidade** (abreviada por f.d.p.), tal que:

I. A função $f(x)$ é sempre **positiva** (ou nula):

$$f(x) \geq 0 \text{ para todo } x;$$

II. A **integral** da f.d.p., de menos infinito até infinito, vale 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1 \text{ (área sob o gráfico de } f(x));$$

III. E a probabilidade da variável aleatória X estar dentro de um intervalo $[a; b]$ é dada pela **integral da f.d.p., de a até b**:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, \text{com } a \leq b.$$

b. Distribuição Acumulada

Assim como no caso discreto, a **distribuição acumulada** representa a probabilidade de X assumir qualquer valor **menor ou igual** a x.

No entanto, no caso contínuo, a distribuição acumulada é dada por uma **função** $F(x)$, dada pela **integral** da f.d.p., de menos infinito até o valor x:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Assim, a **função distribuição acumulada** representa a **primitiva** da função densidade de probabilidade, tal que:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

c. Propriedades

A probabilidade da variável aleatória X ser maior do que um valor a é a probabilidade **complementar** ao caso em que X é **menor ou igual** ao valor a (que é dado pela função distribuição acumulada em a):

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$

A probabilidade de X estar entre a e b é dada pela integral de $f(x)$, limitada pelos extremos a e b. Portanto, isso é igual à primitiva $F(x)$, calculada em b, menos a primitiva calculada em a:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Por fim, a probabilidade de X ser algum ponto c do intervalo é **nula**:

$$P(X = c) = \int_c^c f(x)dx = 0$$

5. Medidas Descritivas

Em Probabilidade, dada uma distribuição contínua ou discreta, calculamos algumas **medidas descritivas** que identificam as principais métricas da população, em relação a sua **posição** ou sua **dispersão**.

a. Valor Médio ou Esperança

É o **valor esperado** (E) para a variável aleatória ou função.

No caso de **distribuições discretas**, o valor esperado da variável é:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot P[X = x_i]$$

De forma similar, considerando a mesma distribuição, o valor esperado de uma função $\boldsymbol{g(x)}$ qualquer é:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{N} g(x_i) \cdot P[X = x_i]$$

No **caso contínuo**, o valor esperado da variável x é dado pela seguinte integral:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Enquanto o valor esperado de uma função $f(x)$ é:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)dx$$

O valor esperado pode ser interpretado como uma **medida da localização do centro** da variável aleatória.

A função de esperança é **linear**, e, por isso, ela apresenta as seguintes propriedades:

I. Dadas uma **constante** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ e uma **constante** $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$, a seguinte propriedade é válida:

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$

II. O **valor esperado da soma** de duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 é a **soma dos valores esperados** de X_1 e X_2:

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

III. Considere duas variáveis aleatórias **independentes**, X e Y. O **valor esperado do produto** das variáveis é o **produto dos valores esperados**:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

b. Variância

A **variância** ($\sigma^2(X)$ ou $Var(X)$) é uma medida da **variabilidade** da distribuição de uma variável aleatória. O cálculo da variância utiliza o conceito de **valor esperado**:

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Algumas propriedades da variância são:

I. Se a é uma **constante** real, então:

$$Var(X + a) = Var(X)$$

II. Se a é uma **constante** real, então:

$$Var(aX) = a^2 Var(X)$$

III. Se X e Y são variáveis aleatórias **independentes**, a variância da soma das variáveis é a soma das variâncias:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

c. Desvio Padrão

O **desvio padrão** (σ) mede a **dispersão** entre a variável aleatória e a média:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$$

d. Momento da Função

O **momento de ordem $\boldsymbol{k}$** de uma função é definido pela seguinte equação:

I. Para o caso discreto:

$$E[X^k] = \sum_{i=1}^{N} {x_i}^k \cdot P[X = x_i]$$

II. Para o caso contínuo:

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx$$

A **esperança** de uma função é o **momento de primeira ordem** dela, enquanto a **variância** é a **diferença** entre o **momento de segunda ordem** e o **quadrado do momento de primeira ordem**.

6. Distribuições Unidimensionais Discretas

Existem algumas **distribuições** de variáveis aleatórias **discretas** que, por serem muito comuns, devem ser estudadas.

a. Binomial

A **distribuição binomial** ocorre quando temos n experimentos que resultam somente em **sucessos** (S) ou **falhas** (F) (ou seja, n ensaios de *Bernoulli*).

Sendo a **probabilidade de sucesso** $P(S) = p$ (e, portanto, $P(F) = 1 - p$) e x o **número de sucessos**, a probabilidade de ocorrerem x sucessos é:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Usamos a notação $X \sim b(n,p)$ quando a variável X assume uma distribuição binomial.

O **valor esperado** de X é dado por:

$$E(X) = np$$

E a **variância** de X é:

$$\sigma^2(X) = np(1-p)$$

b. Geométrica

A **distribuição geométrica** ocorre quando existe uma sequência de ensaios de *Bernoulli* até que ocorra o **primeiro sucesso**.

Portanto, x ensaios são realizados até que ocorra o primeiro sucesso. A probabilidade de ocorrer sucesso no x-ésimo ensaio é:

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}p$$

A notação utilizada para quando uma variável X tem distribuição geométrica é $X \sim Geo(p)$.

O **valor esperado**, nesta distribuição, é:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

E a **variância** é:

$$\sigma^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

c. *Poisson*

A **distribuição de *Poisson*** possui um parâmetro positivo λ que representa a **taxa de ocorrência** por unidade medida.

A probabilidade da variável aleatória assumir um valor x é:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Nos casos em que n é um número **grande** e p é um número **pequeno**, podemos utilizar uma distribuição de *Poisson* em que $\lambda = np$.

O **valor esperado** e a **variância** assumem o mesmo valor:

$$E(X) = \sigma^2(X) = \lambda$$

A notação utilizada para quando uma variável X tem distribuição de *Poisson* é $X \sim Poisson(\lambda)$.

7. Distribuições Unidimensionais Contínuas

As variáveis aleatórias **contínuas** possuem diferentes tipos de distribuição; algumas são mais comuns e estudadas no curso de Probabilidade.

a. Uniforme

A **distribuição uniforme** tem como principal característica a **probabilidade igual** de ocorrer qualquer fenômeno com **mesmo comprimento**.

A **função de densidade de probabilidade** de uma variável aleatória que tem distribuição uniforme em um intervalo $[a; b]$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, a \leq x \leq b \\ 0, x > b \end{cases}$$

A notação utilizada para quando uma variável X tem distribuição uniforme é $X \sim U(a, b)$.

O **valor esperado** é:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Por sua vez, a **variância** é:

$$\sigma^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

b. Exponencial

A **distribuição exponencial** é caracterizada por ter uma taxa de falha constante. Seu parâmetro é um λ, e sua f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

A notação para quando uma variável aleatória X tem distribuição exponencial é $X \sim Exp(\lambda)$.

O **valor esperado** é calculado da seguinte forma:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

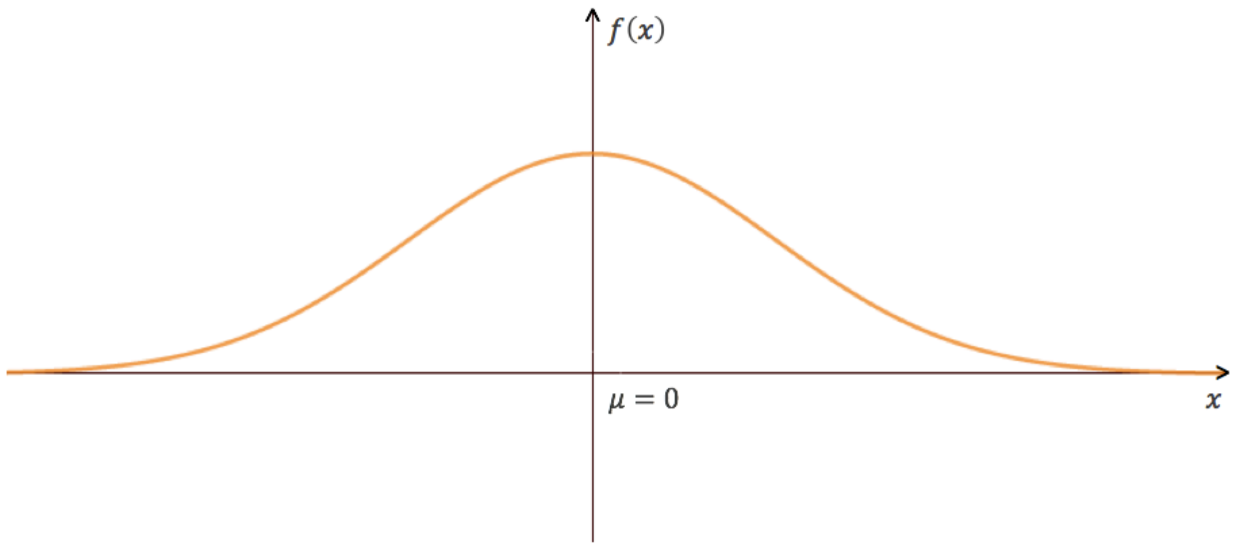
A **variância** é calculada da seguinte forma (note que, por isso, o **desvio padrão** é igual ao valor esperado):

$$\sigma^2(X) = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

c. Normal

A **distribuição Normal** é, talvez, a distribuição de probabilidades mais importante, visto que **qualquer distribuição se aproxima da Normal** quando há um **número grande de dados**.

A distribuição Normal **padrão** é **simétrica** e tem a seguinte forma:



A **média** e o **desvio padrão** da Normal padrão são:

$$\mu = 0 \text{ e } \sigma = 1$$

No entanto, uma variável X que apresenta distribuição Normal (ou seja, $X \sim N(\mu, \sigma)$), possui diferentes valor esperado e variância.

Nesse caso, o **valor esperado** é:

$$E(X) = \mu$$

E a **variância** é:

$$Var(X) = \sigma^2$$

A **função de distribuição de probabilidades** é dada como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

No entanto, a integral dessa função não é analiticamente resolvida. Para calcular a probabilidade de X estar em um determinado intervalo, cria-se uma variável z, tal que:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

E, com essa variável, a probabilidade é obtida pela **tabela Normal** (anexada no fim deste documento). A variável z tem distribuição Normal com média 0 e variância 1.

Para isso, considera-se que a probabilidade se divide **igualmente** entre os dois lados do gráfico da Normal; assim, a probabilidade de z ser negativo ou positivo é igual e vale 0,5:

$$P(z < 0) = P(z > 0) = 0{,}5$$

Assim, a probabilidade de $P(0 < z < z_0)$ é fornecida pela **tabela**, dado um valor de z_0. Utiliza-se a simetria da distribuição para calcular probabilidades de intervalos diferentes. Por exemplo:

$$P(z < 2{,}3) = P(z < 0) + P(0 < z < 2{,}3) = 0{,}5 + P(0 < z < 2{,}3)$$

d. Teorema do Limite Central
Este teorema diz que, dado um número de dados muito grande (ou seja, n grande), a distribuição da média de uma distribuição qualquer **tende a se aproximar de uma distribuição Normal**.

Neste caso, o **valor esperado** dessa Normal aproximada vale:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

E a **variância** é calculada como:

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Assim, com n grande, a notação para a média de uma variável aleatória X que passa a ter distribuição Normal é: pelo Teorema do Limite Central, $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

8. Combinação Linear de Distribuições Normais

Suponha que existam duas variáveis X e Y com **distribuição Normal**, tal que:

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$$

$$Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$$

Seja também uma variável W definida por uma **combinação linear** das variáveis X e Y:

$$W = aX + bY, \;\; a, b \in \mathbb{R}$$

Consequentemente, a variável W também tem **distribuição Normal**, com média μ_W e desvio padrão σ_W:

$$W \sim N(\mu_W, \sigma_W)$$

A **média** é calculada pela combinação linear das médias μ_X e μ_Y:

$$\mu_W = a\mu_X + b\mu_Y$$

E a **variância** é calculada da seguinte forma:

$$\sigma_W^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$$

9. Distribuições Multidimensionais

Distribuições multidimensionais ou conjuntas são utilizadas para situações em que **mais de um resultado** é observado em um experimento.

A probabilidade de um determinado evento envolve todas as variáveis, ou seja:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots)$$

Em Probabilidade, trabalha-se com apenas **duas variáveis**.

Dado um **caso discreto**, em que as variáveis X e Y são discretas, as seguintes propriedades se verificam:

$$0 \leq P(X = x, Y = y) \leq 1$$

$$\sum_x \sum_y P(X = x, Y = y) = 1$$

No **caso contínuo**, em que as variáveis X e Y são contínuas, a probabilidade é tal que:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

E são as seguintes propriedades que valem:

$$0 \leq f(x,y) < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx = 1$$

a. Probabilidades Marginais
Dada uma distribuição multidimensional, é possível retirar a distribuição unidimensional para uma variável.

Para isso, no **caso discreto**, para achar a probabilidade de $X = x$, devemos somar todas as probabilidades em que $Y = y$, para todos os y possíveis:

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

No **caso contínuo**, isso ocorre pela seguinte integral:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot dy$$

b. Independência

Podemos dizer que duas variáveis são independentes, no **caso discreto**, se:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

No **caso contínuo**:

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

c. Distribuições Condicionais

A probabilidade de $X = x$, dado que $Y = y$, no **caso discreto**, é dada por:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

Se as variáveis são independentes, então: $P(X = x|Y = y) = P(X = x)$.

No **caso contínuo**, a função de distribuição de probabilidade condicional é:

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)}$$

d. Esperança Condicional

O **valor esperado** de X, dado que $Y = y$, é calculado, no caso **discreto**, por:

$$E(X) = E[X|Y = y] = \sum_x x \cdot P(X = x|Y = y)$$

E, no caso **contínuo**, por:

$$E(X) = E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\, dx$$

e. Média de uma Função sobre X e Y

O **valor esperado** de uma função $h(x, y)$, dada uma distribuição conjunta, é, no caso **discreto**:

$$E[h(X, Y)] = \sum_x \sum_y h(x, y) \cdot P(X = x, Y = y)$$

E, no caso **contínuo**:

$$E[h(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \cdot f(x, y)\, dy\, dx$$

f. Covariância e Correlação de X e Y

A **covariância** é uma medida que estima variabilidade conjunta de duas variáveis X e Y. A covariância ($Cov[X, Y]$) é calculada por:

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Uma importante propriedade da covariância é que, para $a > 0$ e $b > 0$, segue que:

$$Cov[aX, bY] = abCov[X, Y]$$

O **coeficiente de correlação ρ** estabelece uma razão entre a variação conjunta de X e Y (covariância) e o produto dos desvios padrões de cada variável:

$$\rho[X, Y] = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_x \sigma_y}$$

O coeficiente de correlação está entre -1 e 1:

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

As seguintes propriedades são válidas, para $a > 0$ e $b > 0$:

$$\rho[aX, bY] = \rho[X, Y]$$

$$\rho[-X, Y] = \rho[X, -Y] = -\rho[X, Y]$$

$$\rho[X, X] = 1$$

Lista de Exercícios

1. Probabilidade Complementar

P1 2016.1 Probabilidade Poli-USP, Exercício 4

Uma usina hidrelétrica possui duas unidades geradoras G_1 e G_2.

Devido a problemas de manutenção e eventuais defeitos de funcionamento das turbinas, as probabilidades que em uma dada semana, as unidades 1 e 2 estejam paradas (eventos que chamamos de E_1 e E_2) são, respectivamente, 0,1 e 0,2.

Em uma semana de verão, existe uma probabilidade de 10% que o tempo esteja extremamente quente, com temperatura média acima de $35^o\ C$; chamemos esse evento de H, de forma que a demanda de potência para ar condicionado aumenta consideravelmente.

O desempenho da hidrelétrica pode ser classificado de acordo com a sua capacidade de suprir a demanda de potência em uma semana qualquer da seguinte maneira:

Satisfatória $(\boldsymbol{S})$: se ambas as unidades estão funcionando e temperatura média está abaixo de $35^o\ C$;
Crítica $(\boldsymbol{C})$**:** se uma das unidades está parada e temperatura média está acima de $35^o\ C$;
Marginal $(\boldsymbol{M})$**:** em todos os outros casos.

Fazendo a hipótese de independência estatística entre H e E_1 e E_2, a probabilidade de $P(M)$ é aproximadamente:

A. 0,03
B. 0,25
C. 0,32
D. 0,65
E. 0,80

2. Teorema de *Bayes*

P1 2016.1 Probabilidade Poli-USP, Exercício 5

O gerente de um clube calculou que a probabilidade de receber 1000 visitantes ou mais em qualquer domingo de julho depende da temperatura máxima desse dia e varia de acordo com a seguinte tabela:

Temperatura (^oC)	Probabilidade de 1000 ou mais visitantes	Probabilidade de temperatura
< 20	0,25	0,20
20 – 25	0,50	0,25
25 – 30	0,75	0,30
> 35	0,75	0,25

Num certo domingo o clube recebe mais de 1000 visitantes. Qual a probabilidade aproximada de que a temperatura fique entre $25 - 30^oC$?

A. $\frac{47}{80}$
B. $\frac{3}{4}$

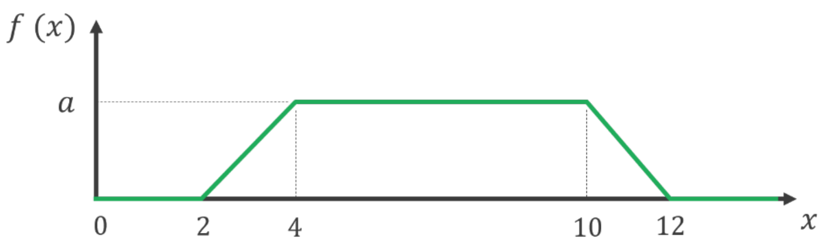
C. $\frac{3}{100}$
D. $\frac{18}{47}$
E. $\frac{1}{5}$

3. Função Densidade de Probabilidade

P1 2016.1 Probabilidade Poli-USP, Exercício 10

Um sistema é constituído de três componentes idênticos. Sabe-se que se pelo menos dois componentes devem funcionar para que o sistema opere corretamente. Considere que cada componente opera de forma independente dos demais.

Qual a probabilidade de o sistema operar por mais de 9 mil horas? O tempo de vida X de cada componente é expresso pela função densidade de probabilidade apresentada abaixo, onde x é expresso em mil horas.



A. $a^2(1-a)$
B. $\frac{1}{16}$
C. $\frac{5}{32}$
D. $a(1-a)^2$
E. $\frac{3}{4}$

4. Variáveis Discretas

P1 2016.1 Probabilidade Poli-USP, Exercício 12

Considere o experimento de lançamento de dois dados honestos. Seja X igual à diferença entre os dois valores obtidos nos lançamentos.

Considere as seguintes proposições:

I. $P[X = -x] = P[X = x]$
II. $P[X = 3] = P[X = 4] + P[X = 5]$
III. $P[X = x] = P[X = x - 1] + \frac{1}{36}$ para x positivo
IV. $P(X > 1) = 1 - P(X < 1)$

Quais as proposições estão corretas?

A. Apenas II.
B. Apenas III e IV.
C. Apenas I, II e III.
D. Apenas I, II e IV.
E. Apenas I e II.

5. Distribuição Normal

P2 2016.1 Probabilidade Poli-USP, Exercício 1

A variável aleatória R tem função densidade de probabilidade $f(r) = re^{-\frac{r^2}{2}}$, caso $r \geq 0$, e $f(r) = 0$ para $r < 0$. A esperança $E(G)$, sendo $G = \frac{1}{R}$, é:

A. $\frac{1}{\sqrt{8\pi}}$
B.$\sqrt{2\pi}$
C. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
D. $+\infty$
E. $\frac{1}{2}$

6. Distribuição Aleatória

P2 2016.1 Probabilidade Poli-USP, Exercício 2

Um escritório de uma empresa tem 8 vendedores que trabalham o mesmo número de horas no escritório e em serviço externo, com agenda aleatória. Qual o menor número de mesas de trabalho que deve existir no escritório de modo que cada um tenha uma mesa pelo menos 90% do tempo?

A. 8
B. 4
C. 6
D. 7
E. 5

7. Distribuição Uniforme

P2 2016.1 Probabilidade Poli-USP, Exercício 10

A variável aleatória X tem distribuição uniforme no intervalo $[-1,1]$. A função densidade de probabilidade da variável $Y = X^2$ no intervalo $[0,1]$ é:

A. $f(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$
B. $f(y) = 2\sqrt{y}$
C. $f(y) = \sqrt{y}$
D. $f(y) = \frac{1}{4}$
E. $f(y) = 1$

8. Distribuição Exponencial

P3 2017.1 Probabilidade Poli-USP, Exercício 5

A mediana de uma variável aleatória X é por definição o valor m tal que $F_X(m) = 0{,}5$, onde $F_X(x)$ é a função distribuição cumulativa de probabilidade. O valor de m quando X é uma variável aleatória exponencial de parâmetro λ é:

A. $\frac{1}{2}$
B. $\ln(\lambda)$
C. $\frac{1}{\lambda}$
D. $\ln(2)$
E. $\frac{\ln(2)}{\lambda}$

9. Distribuição Geométrica

P2 2017.1 Probabilidade Poli-USP, Exercício 5

Considere duas variáveis aleatórias X e Y com distribuições geométricas, com mesmo parâmetro p, e tais que:

$$P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x)P(Y = y)$$

Para quaisquer x e y. Qual é o valor de $P(X + Y = n)$?

A. $np^2(1-p)^n$
B. $p^n(1-p)^n$
C. $(n+1)p^2(1-p)^n$
D. $\frac{1}{n}$
E. $\frac{(1-p)^n}{(np^2)}$

10. Distribuição Conjunta

P3 2016.1 Probabilidade Poli-USP, Exercício 6

Considere duas variáveis contínuas X e Y, com densidade:

$$f(x,y) = \begin{cases} axy, x \in [0,1], y \geq 0, x + y \leq 2, \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

a. Obtenha a constante a.
b. Obtenha a densidade marginal X, $f_X(x)$.
c. Obtenha a probabilidade $P(A)$ para o evento $A = \{(x,y): y \geq x\}$.
d. Obtenha a densidade condicional de Y dado X, $f(x|y)$.