www.estudar.com.vc

Resumo e Lista de Exercícios

Física II

Fuja do Nabo P2 2018.2

Resumo

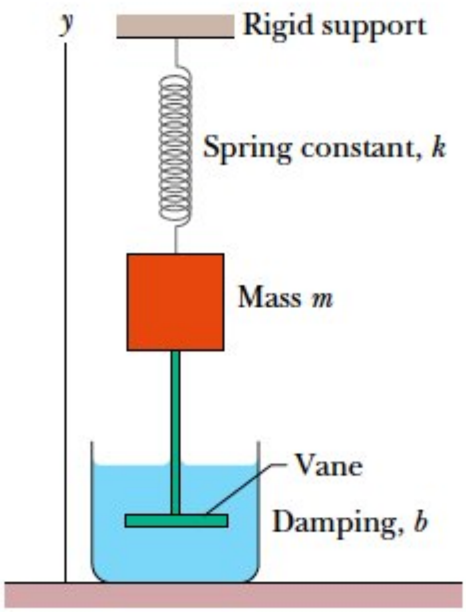
1. Amortecimento

Anteriormente, no **M**ovimento **H**armônico **S**imples (**MHS**), foi estudado o movimento com uma **força restauradora** proporcional ao deslocamento em relação à uma posição de equilíbrio.

Agora, no **M**ovimento **H**armônico **A**mortecido (**MHA**), além da força restauradora, terá também uma **força dissipativa** proporcional à velocidade ($\dot{x}$), do tipo:

$$F = -b\dot{x}$$

Sendo b uma constante relacionada à viscosidade do amortecedor. Um esquema do oscilador amortecido pode ser visto abaixo:



2. Movimento Harmônico Amortecido (MHA)

a. Equação do Movimento
Para se chegar na equação do movimento característica do MHA, usa-se a Segunda Lei de *Newton*:

$$\sum F_x = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0$$

Sendo $\gamma = \frac{b}{m}$ a constante de amortecimento e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ a frequência natural de oscilações.

b. Solução Geral do MHA
Para resolver a equação diferencial acima e achar uma solução geral (que envolve duas funções, por ser de segunda ordem), será usada uma solução particular do tipo:

$$x(t) = Ae^{pt}$$

Para achar o valor de p, essa solução será substituída na equação diferencial do MHA. Lembrando que $\dot{x} = Ape^{pt}$ e $\ddot{x} = Ap^2e^{pt}$, temos:

$$p^2\, Ae^{pt} + p\gamma\, Ae^{pt} + \omega_0^2\, Ae^{pt} \ = 0$$

$$\Rightarrow p^2 + \gamma p \ + \omega_0^2 \ = 0$$

Pode-se achar p usando *Bháskara*, sendo, então, igual a:

$$p = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Repare que o tipo de solução pode ser diferente dependendo da relação entre $\frac{\gamma}{2}$ e ω_0^2. Nesse sentido, vale a pena analisar cada caso com detalhes.

c. Caso Subcrítico $\left(\frac{\gamma}{2} < \omega_0\right)$

No caso em que $\frac{\gamma}{2} < \omega_o$, a constante p será do tipo complexa:

$$p = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega$$

Onde:

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \text{ e } i^2 = -1$$

Por estranho que possa parece, a **solução geral** para o caso subcrítico não vai precisar usar notação complexa. Veja que é possível escrever a solução geral como:

$$x(t) = A \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t + i\omega t\right) + B \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t - i\omega t\right)$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[A\, e^{i\omega t} + B\, e^{-i\omega t}\right]$$

O trecho em destaque, acima, é idêntico ao termo do MHS quando se usa a solução exponencial ($x(t) = Ae^{pt}$). Nesse caso a solução geral vai ser similar à do MHS, só que multiplicada por uma **exponencial**.

Por fim, chega-se nas soluções gerais do tipo:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}[a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)]$$

Ou:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Sendo a, b, A e φ constantes que dependem das condições iniciais,

Repare que nesse caso, o movimento **subcrítico** é como um MHS com uma amplitude que **diminui** com o tempo, devido ao **efeito da dissipação** (e da exponencial decrescente na solução geral).

Nesse caso, o oscilador precisa de um tempo muito grande ($t \to \infty$) para o corpo cessar seu movimento.

d. Aplicação das Condições Iniciais
Tem-se como condições iniciais a posição inicial ($x(0) = x_0$) e a velocidade inicial ($\dot{x}(0) = v_0$). Usando a primeira solução do caso subcrítico, pode-se achar a equação temporal particular da posição do oscilador:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}[a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)]$$

$$x(0) = x_0 = a$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}[a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)] + e^{-\frac{\gamma}{2}t}[a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)]$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -\frac{\gamma}{2}a + b\omega$$

Por fim:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}}\left[x_0\cos(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{\gamma x_0}{2\omega}\right)\sin(\omega t)\right]$$

Ou, caso prefira, a outra solução será do tipo:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Com $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{\gamma x_0}{2\omega}\right)^2}$ e $\varphi = -\arctan\left[\frac{\left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{\gamma x_0}{2\omega}\right)}{x_0}\right]$.

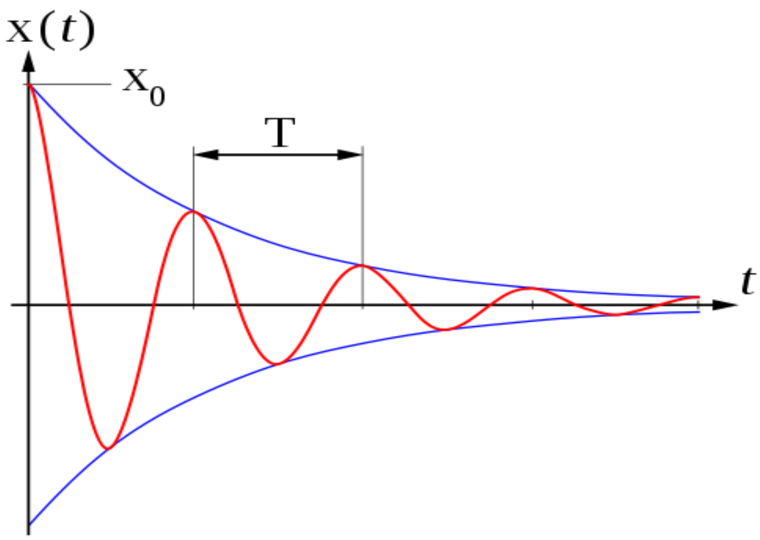
e. Gráfico

Para desenhar o gráfico de $x(t)$, onde:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Pode-se fazer a interpretação de um gráfico de MHS com amplitude decrescente.

Isso ocorre por causa da exponencial decrescente. Dessa forma, a cada período, a amplitude reduz a uma determinada taxa, sendo que seus pontos máximos formam a exponencial decrescente em questão:



Repare que, nesse exemplo, foi considerado $\varphi = 0$.

f. Balanço de Energia

Como não se trata de um sistema em que a energia se conserva, haverá dissipação de energia. Portanto, é possível calcular a variação da energia mecânica no tempo:

$$E = \frac{m(\dot{x})^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

$$\dot{E} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x}$$

O termo em destaque é um termo presente na equação diferencial do MHA, e é igual a $-b\dot{x}$. Então:

$$\dot{E} = -b\dot{x}^2 = -m\gamma\dot{x}^2$$

Lembrando que:

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}[B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)] + e^{-\frac{\gamma}{2}t}[C\cos(\omega t) - B\sin(\omega t)]$$

E a energia média em função do tempo é (para $\omega_0 \gg \gamma$):

$$\bar{E}(t) = \boldsymbol{\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2}e^{-\gamma t}$$

Repare que o termo em negrito é a **energia do oscilador harmônico**. Nesse caso, a energia é a mesma do MHS, decaindo exponencialmente (a interpretação é a mesma para amplitude que decresce).

O tempo ou constante de decaimento (τ_d) é definido como o tempo para a energia se reduzir em $1/e$. Ou seja, no caso da energia média, a constante é:

$$\tau_d = \frac{1}{\gamma}$$

g. Considerações para a Prova sobre o Caso Subcrítico
As seguintes considerações são importantes:

I. É o caso que mais cai do MHA, portanto merece uma atenção especial.

II. Muitas vezes nos amortecimentos subcríticos, o γ é desconsiderado por se tratar de oscilações fracamente amortecidas. Verifique as ordens de grandeza.

III. O MHA, em geral, cai mais como questões do tipo teste.

IV. Use bastante o formulário fornecido pela prova para não precisar ficar decorando muitas fórmulas.

h. Caso Supercrítico $\left(\frac{\gamma}{2} > \omega_0\right)$

Nesse caso, em que $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$, a solução exponencial será dada de duas formas, visto que teremos $p = -\frac{\gamma}{2} \pm \beta$, com $\beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$. A solução geral, então será do tipo:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[ae^{\beta t} + be^{-\beta t}\right]$$

Visto que a solução geral é a **combinação linear** das particulares, a e b são constantes que dependem das condições iniciais.

i. Caso Crítico $\left(\frac{\gamma}{2} = \omega_0\right)$

Discutindo o caso em que $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$, a solução com a exponencial terá $p = -\frac{\gamma}{2}$. No entanto, como a equação diferencial é de segunda ordem, é necessária uma segunda solução particular para a solução geral.

Nesse caso, a solução geral vai ser do tipo:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A + Bt)$$

Visto que $x(t) = Bt\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ também é solução. A e B são constantes que dependem das condições iniciais.

É válido ressaltar que esse é o caso em que o amortecimento ocorre **mais rápido**.

j. Aplicação das Condições Iniciais
Mais uma vez, usando a condição da posição e velocidade iniciais (x_0 e v_0):

$$x(0) = x_0 = A$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2}\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}[A\ + B\ t] + e^{-\frac{\gamma}{2}t}B$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -\frac{\gamma}{2}A + B$$

Sendo então $A = x_o$ e $B = v_o + \frac{\gamma}{2}x_0$.

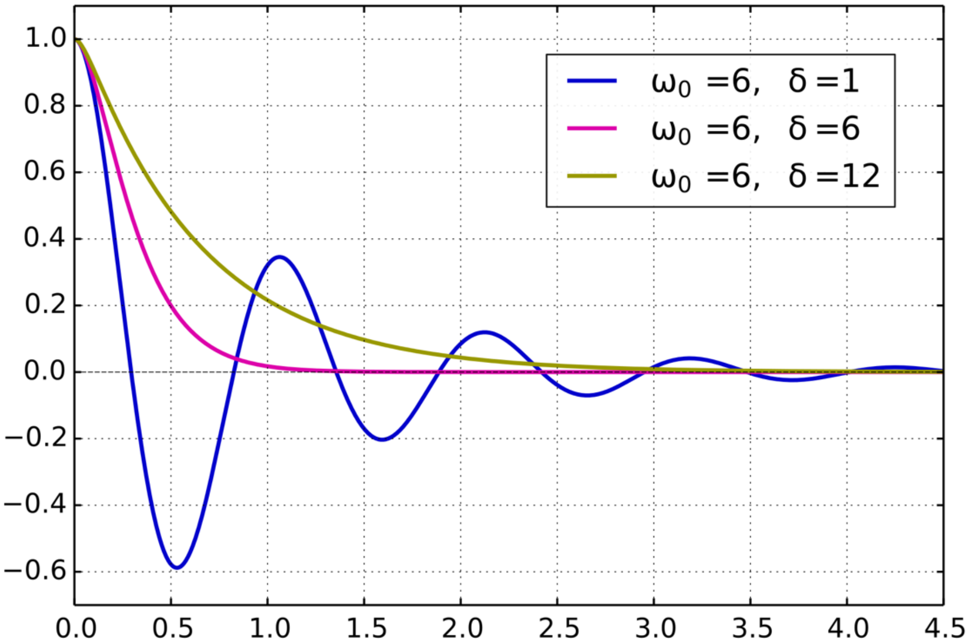
k. Considerações para a Prova sobre o Caso Crítico
Sobre este caso, são válidas as seguintes considerações:

I. Em geral, quando cai este caso, é preciso saber a relação $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \omega_0^2$.

II. É bom saber comparar os movimentos amortecidos. Nesse caso lembre-se que o amortecimento crítico é o que decai mais rápido.

I. Comparação entre as Soluções

As três soluções (regime subcrítico, crítico e supercrítico) podem ser comparadas no gráfico exemplo abaixo (considere $\delta = \frac{\gamma}{2}$):



3. Equação de *Euler*

Para o próximo passo, teremos que entrar no mundo dos **complexos**. Para isso, usaremos uma fórmula essencial, chamada equação de *Euler*:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Lembrando que $i^2 = -1$.

No final desse resumo, há uma revisão básica sobre números complexos. Caso sinta necessidade de relembrar algo, consulte-o.

4. Movimentos Forçados

Depois de trabalhar com a força restauradora e a força de amortecimento, chegou a vez de aparecer uma **força externa qualquer**. Nesse curso, trabalhamos com forças do tipo senoidais ou cossenoidais:

$$F_{ext} = F_0 \cos{(\Omega t)}$$

a. Movimento Harmônico Forçado (MHF)

Vamos ter um oscilador harmônico sob efeito da força externa cossenoidal. Por enquanto, vamos desprezar os efeitos de dissipação por amortecimento.

b. Equação do MHF

Também partindo da 2ª Lei de *Newton*, vamos ter o seguinte:

$$\sum \vec{F} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = -kx + F_o \cos \Omega t$$

Multiplicando tudo por $\frac{1}{m}$:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_o}{m} \cos \Omega t$$

Note que temos uma **equação diferencial não-homogênea** (ou seja, não é igual a 0 que nem as outras).

Nesse tipo de equação diferencial, a solução geral será a soma de uma **solução particular** da não-homogênea e da **solução geral** da homogênea associada a ela.

Ou seja, se x_1 for solução da não homogênea (solução **estacionária**) e x_2 for solução da homogênea a ela associada:

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{F_o}{m}\cos\Omega t$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 0$$

A solução geral será $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

c. Solução Estacionária da Equação do MHF
Para achar a solução particular da equação do MHF, é preciso notar que $\cos(\Omega t)$ é a parte real do complexo $e^{i\Omega t}$ (vide equação de *Euler*).

Nesse caso, para achar a solução estacionária, faz-se a seguinte mudança de variável:

$$x(t) = \mathbb{R}e[z(t)]$$

Sendo $z(t)$ a nova **variável complexa**. A nova equação encontrada é:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

Com essa equação, pode-se aplicar o “chute” da solução. Esse chute é padronizado como:

$$z(t) = Ae^{i\Omega \mathrm{t}}$$

Lembrando que $\ddot{z}(t) = -A\Omega^2 e^{i\Omega \mathrm{t}}$. Assim, substituímos z e $\ddot{z}$ para achar o valor de A:

$$-A\Omega^2 e^{i\Omega \mathrm{t}} + \omega_0^2 A e^{i\Omega \mathrm{t}} = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

Obtendo o valor de A ao cortar o termo $e^{i\Omega t}$:

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

Repare que $A(\Omega)$ (**amplitude**) é um real puro. Dessa forma, usando $x(t) = \mathbb{R}e[z(t)]$ e a equação de *Euler*:

$$z(t) = Ae^{i\Omega \mathrm{t}} = A[\cos(\Omega \mathrm{t}) + i \sin(\Omega \mathrm{t})]$$

$$x(t) = \frac{F_o \cos(\Omega \mathrm{t})}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

Observação: De fato, seria possível chegar no mesmo resultado “chutando” $x(t) = A\cos(\Omega t)$, sem precisar dos complexos.

d. Solução Geral da Equação do MHF

Já temos a **solução particular** da equação não homogênea deste caso. A **solução da homogênea** a ela associada é a solução do MHS. Então, a solução geral é:

$$x(t) = \frac{F_o \cos(\Omega \mathrm{t})}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} + B\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega_0 t)$$

Ou:

$$x(t) = \frac{F_o \cos(\Omega \mathrm{t})}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} + A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Sendo A, B, C e φ constantes que dependem das condições iniciais do movimento.

e. Ressonância no MHF

O fenômeno da **ressonância** pode ser resumido para quando a oscilação ocorre em sua **amplitude máxima**. Repare que a amplitude achada anteriormente é função de Ω:

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m|\omega_0^2 - \Omega^2|}$$

Assim, deve-se achar o valor de Ω que maximiza a amplitude. Repare que:

$$\lim_{\Omega \to \omega_0} A(\Omega) = +\infty$$

Conclui-se que quanto mais Ω se aproximar de ω_0, **maior** será a amplitude. A amplitude não será infinita, só não estará nos limites de pequenas oscilações.

É possível ver o crescimento da amplitude com o tempo. Para isso, usa-se o caso particular para o corpo inicialmente na origem e em repouso:

$$x(t) = \frac{F_o \cos(\Omega \mathrm{t})}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} + A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(0) = \frac{F_o}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} + A\cos(\varphi) = 0$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{F_o \sin(\Omega \mathrm{t})}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} - A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x}(0) = -A\,\omega_0 \sin(\varphi) = 0$$

Obtendo $\varphi = 0$ e $A = -\frac{F_o}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}$.

Faz-se então a aproximação pelo limite:

$$x_R(t) = \lim_{\Omega \to \omega_0} x(t)$$

Lembrando que $\omega_0^2 - \Omega^2 = (\omega_0 - \Omega)(\omega_0 + \Omega)$:

$$\frac{F_0}{m}\lim_{\Omega\to\omega_0}\left[\frac{\cos(\Omega t)-\cos(\omega_0 t)}{(\omega_0-\Omega)(\omega_0+\Omega)}\right]$$

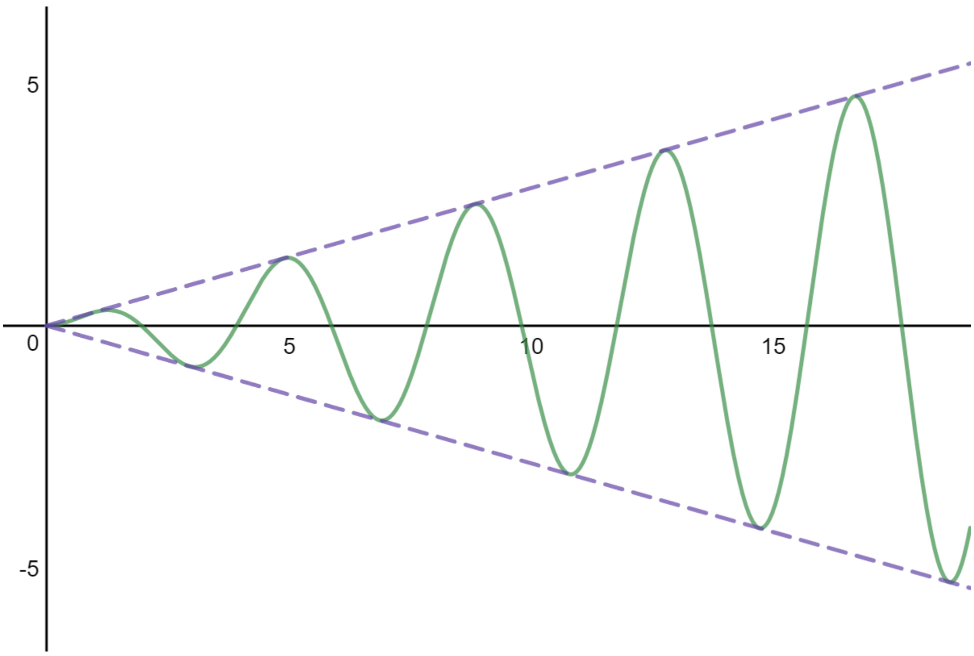
$$\Rightarrow \frac{F_0}{2m\omega_0}\lim_{\Omega\to\omega_0}\left[\frac{\cos(\Omega t)-\cos(\omega_0 t)}{(\omega_0-\Omega)}\right]$$

Usando *L'Hospital*:

$$\frac{F_0}{2m\omega_0}\lim_{\Omega\to\omega_0}(t\sin\Omega t)=\frac{F_0 t\sin\omega_0 t}{2m\omega_0}$$

$$\Rightarrow x_R(t)=\frac{F_0 t\sin(\omega_0 t)}{2m\omega_0}$$

Repare que o crescimento da amplitude é **linear** ($\propto t$). Por isso, os pontos de máximos formarão uma reta:



f. Movimento Harmônico Amortecido e Forçado (MHAF)

Nesse caso de oscilação forçada, será levada em conta a **força de dissipação** estudada há pouco ($F = -b\dot{x}$). A equação diferencial do movimento vai ser do tipo:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

g. Solução Estacionária do MHAF

Assim como no MHF, também vai ser necessário fazer a mudança para a variável complexa:

$$x(t) = \mathbb{R}e[z(t)]$$

E usando $z(t) = Ae^{i\Omega t}$, $\dot{z}(t) = iA\Omega e^{i\Omega t}$ e $\ddot{z}(t) = -A\Omega^2 e^{i\Omega t}$:

$$\ddot{z}(t) + \gamma\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow -\Omega^2 Ae^{i\Omega t} + i\gamma\Omega\, Ae^{i\Omega t} + \omega_0^2\, Ae^{i\Omega t} = \frac{F_0}{m}e^{i\Omega t}$$

Multiplicando tudo por $\frac{1}{e^{i\Omega t}}$, o valor de A fica:

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\gamma\Omega]}$$

A é um número complexo, mas como $x(t)$ é apenas a parte **real** desse complexo, não teremos que realizar operações complexas.

Podemos reescrever a **amplitude**. Multiplicando em cima e em baixo pelo conjugado:

$$A(\Omega) = \ A(\Omega) \cdot \frac{[(\omega_0^2 \ - \Omega^2) - i\gamma\Omega\ ]}{[(\omega_0^2 \ - \Omega^2) - i\gamma\Omega\ ]}$$

$$\Rightarrow A(\Omega) = \frac{F_0\ [(\omega_0^2 \ - \Omega^2) - i\gamma\Omega\ ]}{m[(\omega_0^2 \ - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2\ ]}$$

Obtendo um novo rosto para a amplitude. Para melhorar as passagens para a solução final, colocaremos a amplitude complexa em sua forma exponencial.

Para isso, lembre-se da equação de *Euler*. Para isso, suponha o complexo z:

$$z = a + ib = \rho \text{ cis } \theta = \rho\ e^{i\theta}$$

Sendo $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \arg z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

Dessa forma:

$$A(\Omega) = \rho\ e^{i\theta}$$

Onde:

$$\rho = \frac{F_0\ \sqrt{(\omega_0^2 \ - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}}{m[(\omega_0^2 \ - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2\ ]}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}}$$

E o argumento θ é:

$$\theta = -\arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$$

Agora, aplicando na solução geral:

$$z(t) = A(\Omega)e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow z(t) = \rho e^{i(\Omega t + \theta)}$$

E, por fim, pela equação de *Euler,* e lembrando que $x(t) = \mathbb{R}e[z(t)]$:

$$x(t) = \frac{F_0 \cos(\Omega t + \theta)}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}}$$

Sendo essa a solução estacionária do MHAF. O que está destacado é a amplitude do MHAF.

h. Solução Geral da Equação do MHAF

A solução geral, como visto anteriormente, é a soma da solução particular da equação **não homogênea** (x_1) com a solução da **homogênea** (x_2). Nesse caso, a equação homogênea é do MHA:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_1(t) = \frac{F_0 \cos{(\Omega t + \theta)}}{m\sqrt{(\omega_0^2\ - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}}$$

E dependendo da relação entre $\frac{\gamma}{2}$ e ω_0:

I. Se $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$: $x_2(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \phi)$

II. Se $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$: $x_2(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(A + Bt)$

III. Se $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$: $x_2(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t})$

Todas essas fórmulas devem ser fornecidas no formulário da prova.

i. Ressonância no MHAF

No caso de movimento amortecido e forçado, por ter um fator de amortecimento, o Ω para ressonância será diferente.

Para achá-lo, recomenda-se derivar, da solução estacionária, o que está dentro da raiz e igualar a zero para **minimizar o denominador** e **maximizar a amplitude**. Dessa forma, obtém-se:

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

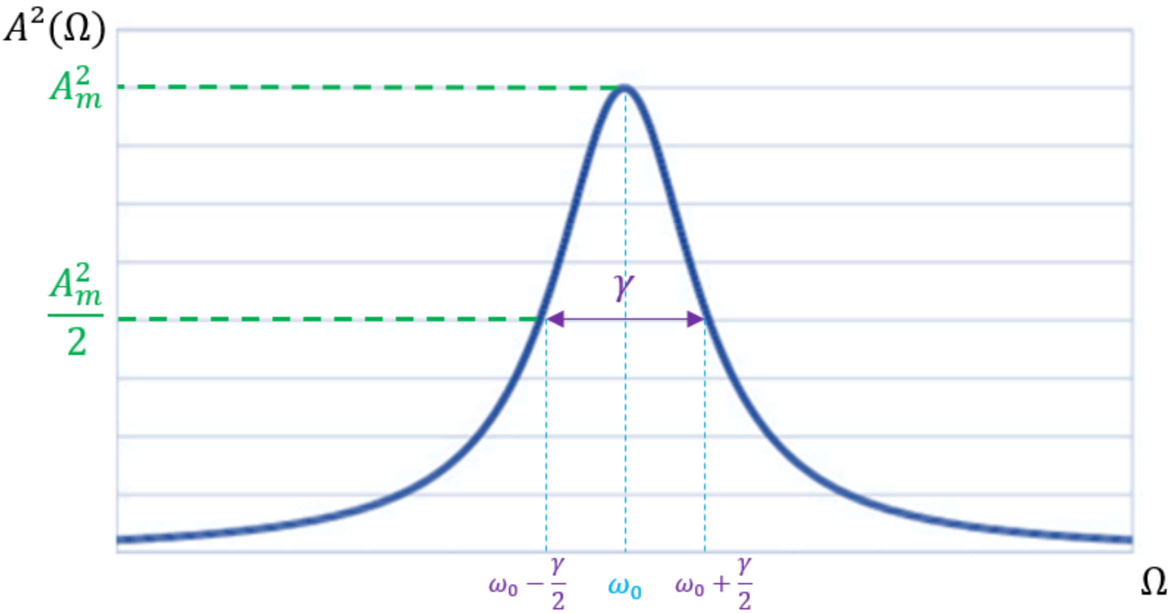
E para $\gamma \ll \omega_0$, obtém-se o mesmo resultado do MHF ($\Omega_R \approx \omega_0$). No caso de oscilações fracamente amortecidas, tem-se:

$$A_m = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0}$$

Ainda pode-se obter a seguinte relação:

$$A^2\left(\omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{A_m^2}{2}$$

Quando o exercício pedir o γ e ω_0 para **oscilações fracamente amortecidas e forçadas**, os mesmos podem ser encontrados observando o seguinte gráfico:



j. Balanço de Energia no MHAF

A energia média dissipada ou recebida em uma oscilação $(d\bar{E}/dt)$ é nula (demonstrável por integral). Nesse caso, considera-se que toda a energia perdida pela dissipação vai ser devolvida pela **potência da força externa**.

Assim:

$$\bar{P} = m\gamma\bar{\dot{x}}^2$$

A **potência média** fornecida pela força externa ao sistema é:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}m\gamma\Omega^2 A^2$$

Sendo A a amplitude do MHAF (estacionário). Aplicando o valor de $A(\Omega)$:

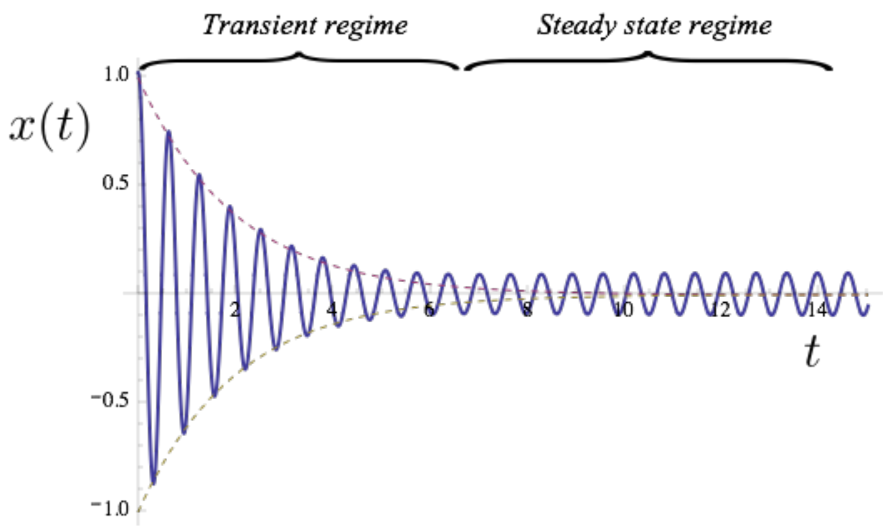
$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\gamma\Omega)^2}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\gamma F_0^2 \Omega^2}{2m[(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\Omega)^2]}$$

h. Regime Transiente e Regime Estacionário

O regime chamado **transiente** (ou transitório) é aquele relacionado à solução da equação **homogênea**. É como o sistema massa-mola se comporta inicialmente.

Depois de um tempo longo, o corpo atinge o regime **estacionário**, relacionado à solução **particular**. Abaixo um gráfico do funcionamento dos dois regimes:



Repare que as condições iniciais influenciam a amplitude inicial.

k. Fator de Mérito (ou de Qualidade)

O **fator de qualidade** mede a razão entre a **energia armazenada** no oscilador e a **energia dissipada** por ciclo, multiplicadas por 2π. No caso do oscilador no estado de amortecimento **fraco**, o fator de qualidade é:

$$Q = \frac{\omega_o}{\gamma}$$

Repare que quanto maior o Q, menor o amortecimento. Para o **MHAF**, o fator de qualidade é:

$$Q = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega}\right)\frac{\omega_0}{\gamma}$$

5. Apêndice: Números Complexos

O conjunto dos números complexos é aquele que contém os **reais** e as **raízes de números negativos**. Eles podem ser representados da seguinte forma algébrica:

$$z = a + ib$$

Sendo que i é a unidade imaginária tal que: $i^2 = -1$.

Chamamos a de parte **real** do número complexo ($a = \mathbb{R}e(z)$) e b de parte **imaginária** ($b = Im(z)$).

Esse mesmo complexo pode ser escrito na forma trigonométrica (ou polar):

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho \text{ cis } \theta$$

Sendo $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \arg z = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

A forma **exponencial** também é muito utilizada, e é dada por:

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Lista de Exercícios

1. Regime Subcrítico

P2 2014 Física II Poli USP

O oscilador harmônico amortecido possui a seguinte equação de movimento:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

Supondo que o oscilador se encontra no regime subcrítico, assinale o valor da razão $\frac{x(t+\tau)}{x(t)}$, onde τ é o período.

A. $\exp\left[-\frac{\gamma}{\pi\sqrt{\omega_o^2-\gamma^2}}\right]$

B. $\exp\left[-\frac{\pi\gamma}{\sqrt{\omega_o^2-\frac{\gamma^2}{4}}}\right]$

C. $\exp\left[-\frac{\gamma}{4\pi\sqrt{\omega_o^2-\frac{\gamma^2}{4}}}\right]$

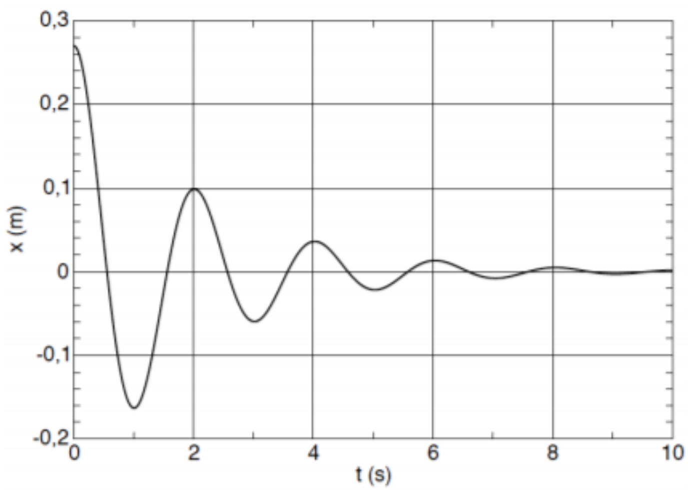
D. $\exp\left[-\frac{\gamma}{\pi\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_o^2}}\right]$

E. $\exp\left[-\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\omega_o^2-\frac{\gamma^2}{4}}}\right]$

2. Regime Subcrítico

P2 2016 Física II Poli USP

A figura mostra a posição de um sistema massa-mola sujeito à ação de uma força dissipativa proporcional à velocidade. Sabendo que a massa do bloco é $m = 1{,}0\ kg$, pode-se afirmar que (dica: considere $\varphi = 0$ e lembre-se que $e \approx 2,7$ e $\ln e = 1$):



A. A constante de amortecimento é $\gamma \approx 1\ rad/s$ e a frequência natural de oscilação é $\omega_0 \approx 2\pi\ rad/$s.
B. A constante de amortecimento é $\gamma \approx 1\ rad/s$ e a frequência natural de oscilação é $\omega_0 \approx 2\pi\ rad/s$.
C. A constante de amortecimento é $\gamma \approx 1\ rad/s$ e a frequência natural de oscilação é $\omega_0 \approx \pi\ rad/s$.
D. A constante de amortecimento é $\gamma \approx 2\ rad/s$ e a frequência natural de oscilação é $\omega_0 \approx \pi/2\ rad/s$.
E. A constante de amortecimento é $\gamma \approx 2\ rad/s$ e a frequência natural de oscilação é $\omega_0 \approx \pi\ rad/s$.

3. Amortecimento Crítico

P2 2015 Física II Poli USP

A suspensão de um carro de $700\,kg$ (vazio) foi otimizada para amortecimento crítico quando está com lotação máxima (4 passageiros de $75\,kg$ cada). Quando as pessoas saem do carro, ele se eleva em $6\,cm$. Qual é o coeficiente de amortecimento do conjunto de amortecedores ligados à suspensão do carro?

A. $\sqrt{2} \cdot\ 10^4\ kg/s$

B. $2\sqrt{35} \cdot\ 10^3\ kg/s$

C. $2\sqrt{\frac{5}{7}} \cdot\ 10^4\ kg/s$

D. $2\sqrt{2}\ \cdot\ 10^4 kg/s$

E. $2\ \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot\ 10^4\ kg/s$

4. Amortecimento Crítico

P2 2014 Física II Poli USP

Um oscilador criticamente amortecido, partindo da posição de equilíbrio, recebe um impulso que lhe comunica uma velocidade inicial v_0. Verifica-se que ele passa por seu deslocamento máximo, igual a 7,4 cm, após 1 s. Considere $e^{-1} = 0,37$, $e^{-2} = 0,14$ e $e^{-3} = 0,05$. A velocidade inicial v_o e posição no instante $t = 2\ s$ são, respectivamente:

A. $10\ cm/s$ e 2,8 cm
B. $20\ cm/s$ e 1,4 cm
C. $10\ cm/s$ e 5,6 cm
D. $20\ cm/s$ e 5,6 cm
E. NDA

5. Amortecimento Crítico e Supercrítico

P2 2009 Física II Poli USP, Adaptada

Um oscilador composto por uma mola de massa desprezível com constante k e por um bloco de massa m, está sujeito à ação de uma força de amortecimento $F_a = -\rho\dot{x}$. Considere que o sistema massa-mola se encontra no regime de amortecimento crítico.

a. Determine o coeficiente de resistência viscosa ρ. Forneça a resposta em função de k e m.
b. Sabendo que as condições iniciais são tais que $x(t = 0) = x_0$ e $\dot{x}(t = 0) = 0$, determine a posição do sistema massa-mola em função do tempo. Expresse o resultado em termos de k e m.

c. Se a massa do bloco reduzir pela metade $\left(M = \frac{m}{2}\right)$, qual será o regime de oscilação?

d. Sabendo que as condições iniciais são tais que $x(t = 0) = 0$ e $\dot{x}(t = 0) = v_0\ m/s$, determine a posição do segundo sistema massa-mola em função do tempo. Expresse o resultado em termos de k e m.

6. Movimento Harmônico Forçado

P3 2014 Física II Poli USP

Um objeto de $2\ kg$, preso a uma mola, oscila sem atrito sujeito a uma força $F = 3\sin(2\pi t)$. Conhecendo a constante elástica da mola, $k = 20\ N/m$, obtenha o período e a amplitude do movimento.

A. $T = 1\ s, A = \frac{3}{8}\ [2\pi^2 - 10]^{-1}\ m$
B. $T = 1\ s, A = \frac{3}{4}\ [2\pi^2 - 5]^{-1}\ m$
C. $T = 2\ s, A = \frac{3}{4}\ [2\pi^2 - 10]^{-1} m$
D. $T = 1\ s, A = \frac{3}{4}\ [2\pi^2 - 10]^{-1}\ m$
E. $T = 2\ s, A = \frac{3}{4}\ [2\pi^2 - 5]^{-1}\ m$

7. Ressonância do MHF

P2 2014 Física II Poli USP

Considere um oscilador harmônico não-amortecido na presença da força externa $F_0 \cos(\omega t)$. Qual a solução geral para $x(t)$ no regime de ressonância ($\omega = \omega_0$) sabendo que o oscilador se encontra inicialmente em repouso e na origem?

A. $\frac{2F_0}{m\omega_0}\ t \sin(\omega_0 t)$
B. $\frac{F_0}{m\omega_0}\ \sin(\omega_0 t)$
C. $\frac{F_0}{m\omega_0}\ \cos(\omega_0 t)$
D. $\frac{F_0}{2m\omega_0}\ t \sin(\omega_0 t)$
E. $\frac{F_0}{m\omega_0}\ t \sin(\omega_0 t)$

8. Ressonância do MHF

P2 2014 Física II Poli USP

Considerando o oscilador harmônico forçado não-amortecido no regime de ressonância ($\omega \to \omega_0$), que parte do repouso na posição de equilíbrio, qual o perfil da curva que passa pelos pontos de máximo da oscilação?

A. Linear decrescente.
B. Exponencial decrescente.
C. Constante.
D. Linear crescente.
E. Exponencial crescente.

9. Movimento Harmônico Amortecido e Forçado

P2 2014 Física II Poli USP

Um corpo de $1\,kg$ oscila preso a uma mola que tem uma constante elástica igual a $400\,N/m$. A constante de amortecimento linear vale $b = 10{,}00\,kg/s$. O sistema é excitado por uma força senoidal de valor máximo igual a $10\,N$ e frequência angular de $10\,rad/s$. Qual é a amplitude das oscilações?

A. $\sqrt{10}/10\,m$
B. $\sqrt{1000}/10\,m$
C. $\sqrt{10}/1000\,m$
D. $\sqrt{10}/100\,m$
E. $\sqrt{10}\,m$

10. Movimento Harmônico Amortecido e Forçado

P2 2015 Física II Poli USP

Um oscilador harmônico com amortecimento $\gamma < 2\omega_0 = 20\,rad/s$ está em repouso na posição de equilíbrio quando é submetido a uma aceleração senoidal $a(t) = a_0 \sin(\Omega t)$. Considere a equação de movimento do tipo $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2\,x = a(t)$.

a. Sendo $\gamma = 5\,s^{-1}$, qual a frequência da aceleração para que a amplitude final de oscilação (regime estacionário, $t \to \infty$) seja máxima?

b. Mantendo-se a frequência anterior e reduzindo-se o amortecimento para $\gamma = 0{,}002/s$, qual o aumento relativo da amplitude de oscilação final?
c. Encontre a função que descreve o movimento em função do tempo, $x(t)$, durante o regime transitório com $\gamma \ll \omega_0$.

11. Potência Média

P2 2017 Física II Poli USP, Adaptado

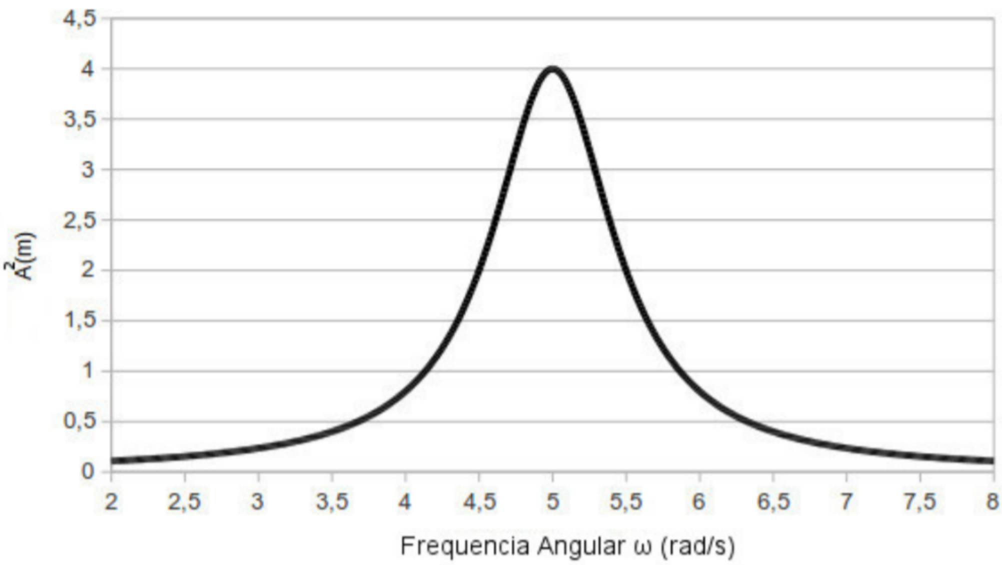
Considere um bloco de massa m, preso a uma mola de constante k. O bloco pode movimentar-se sobre uma superfície horizontal em que um líquido viscoso foi derramado, dando origem a uma força dissipativa proporcional à velocidade, com constante ρ. Uma força externa $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ é aplicada ao bloco, onde Ω é uma frequência angular sintonizável.

a. Calcule a potência média transferida pela força externa ao bloco, na situação estacionária, em função de Ω.
b. Encontre a expressão exata da frequência Ω_{max} em que essa potência média é máxima. Calcule o valor desta frequência, justificando as aproximações.

12. Fator de Qualidade

P2 2014 Física II Poli USP

O gráfico abaixo mostra o quadrado da amplitude, $A^2(\omega)$, em função da frequência de oscilação de uma força senoidal aplicada. Dado que o sistema é fracamente amortecido, obtenha seu fator de qualidade, Q. (Dado: use $Q = \omega_0/\gamma$).



A. $Q = 1$
B. $Q = 4$
C. $Q = 10$
D. $Q = 2$
E. $Q = 5$