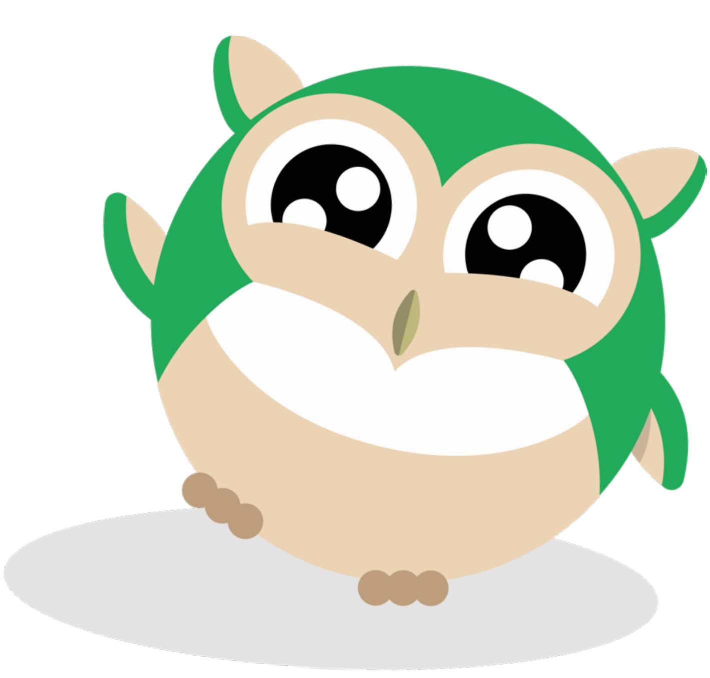
www.estudar.com.vc

Resumo e Lista de Exercícios

Álgebra Linear II

Fuja do Nabo P2 2018.2



www.estudar.com.vc

Resumo

Para fins gerais, considere V um espaço vetorial, $T: V \to V$ uma transformação e I o operador identidade.

1. Transformações, Núcleo e Imagem

a. Matriz de Transformação
Essa matriz é um jeito de codificar a transformação. Tome $T: V \to W$, com B sendo uma base de V e C sendo uma base de W. Seja então:

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ e } C = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$$

O algoritmo de construção da matriz é:

I. Tome as **imagens** dos vetores da base $B \to T(v_1) = u_1, \dots, T(v_n) = u_n$.

II. **Decomponha** os vetores das imagens na base C:

$$u_1 = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m, u_2 = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m, \dots,$$

$$u_n = \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m$$

III. Bote os escales obtidos nas **colunas** na ordem **crescente** (u_1 primeiro):

$$[T]_{BC} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m & \beta_m & \cdots & \gamma_m \end{bmatrix}$$

Repare nos seguintes fatos:

I. $[T]_{BC}$ tem tamanho $m \times n$, ou seja, ela tem tantas linhas quantos vetores da base de chegada C (tínhamos m vetores) e tantas colunas quantos vetores da base de saída B (tínhamos n vetores).

II. A matriz trabalha com os **escalares** que multiplicam os vetores das bases e não com os vetores propriamente ditos.

III. A matriz é **suscetível** à escolha de bases.

b. Utilização da Matriz de uma Transformação

A matriz de transformação serve para que possamos realizar a transformação da seguinte maneira:

$$[T(v)]_C = [T]_{BC} \cdot [v]_B$$

Com $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $C = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$. Perceba que $[v]_B$ corresponde às **coordenadas** do vetor v na base B. Então, se:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Temos que:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

c. Encontrando o Núcleo através da Matriz

O **núcleo** corresponde aos vetores que levam uma transformação ao zero. Para encontrá-lo usando a matriz, basta escrever o vetor v como uma incógnita do tipo:

$$v = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B$$

Então, igualamos tudo a **zero** e teremos um **sistema linear homogêneo**:

$$[T]_{BC} \cdot [v]_B = [T(v)]_C \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m & \beta_m & \cdots & \gamma_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_C \iff$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \cdots + \gamma_1 x_n = 0 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \gamma_2 x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_m x_1 + \beta_m x_2 + \cdots + \gamma_m x_n = 0 \end{cases}$$

Ao final, você encontrará condições para as variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$. Com elas, podemos escrever o **conjunto gerador do núcleo**.

d. Encontrando a Imagem por meio da Matriz
O conjunto gerador da **imagem** corresponde às imagens dos vetores da base de saída B. Para encontrá-lo usando a matriz, basta tomar cada vetor da base escrito nela própria.

Repare agora que, se $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, podemos concluir que:

$$v_1 = (1, 0, \dots, 0)_B, v_2 = (0, 1, \dots, 0)_B, \dots, v_n = (0, 0, \dots, 1)_B$$

Isso ocorre porque um vetor da base escrito na própria base é 1 vezes ele próprio.

Então podemos tomar cada uma das imagens e o conjunto de todas elas será o **conjunto gerador da imagem**. Logo:

$$Im\ (T) = [T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)]$$

e. Operações com Transformações
Podemos realizar operações com as transformações, como multiplicá-las por escalares e somá-las.

Para exemplificar, tome as transformações $S: V \to W$ e $T: V \to W$. É importante que o domínio e contradomínio de ambas **coincidam**.

Definem-se as operações de soma e multiplicação por escalar do seguinte modo:

Soma: $(S + T)(v) = S(v) + T(v)$

Multiplicação por escalar: $(\lambda T)(v) = \lambda T(v)$

Podemos ainda tomar conclusões a respeito das matrizes. Considere que escrevemos as matrizes $[S]_{BC}$ e $[T]_{BC}$. Conclui-se que:

$$[S+T]_{BC} = [S]_{BC} + [T]_{BC}$$

$$[\lambda T]_{BC} = \lambda [T]_{BC}$$

f. Composição de Transformações

A única operação que resta fazer com transformações é a **composição**. Tomamos a composição assim como fazemos com funções. Então, dizemos que:

$$(S \circ T)(v) = S\big(T(v)\big)$$

Traduzindo isso de modo prático, definiremos $T: U \to V$ e $S: V \to W$. Tome ainda as bases B, C e D para os espaços U, V e W, respectivamente. Obtemos, então, o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "{[T]_{BC}}"] \arrow[rr, bend right, "{[S\circ T]_{BD}}"'] & V \arrow[r, "{[S]_{CD}}"] & W \end{tikzcd}$$

Para obter a matriz da transformação composta, fazemos a seguinte operação:

$$[S \circ T]_{BD} = [S]_{CD} \cdot [T]_{BC}$$

Observação: Se você, alguma vez, já se perguntou por que as matrizes são multiplicadas do jeito que são, a resposta está logo acima. A multiplicação de matrizes é definida do jeito que é para que essa equação acima valha.

g. Mudança de Base

Aprendemos, em Álgebra Linear I, que uma matriz de mudança de bases é definida por:

$$M_{F,B} \cdot [v]_F = [v]_B$$

Ou seja, a matriz $M_{F,B}$ é a matriz que pega vetores na base F e leva para a base B.

A notação que passa a ser utilizada é diferente da ensinada em Álgebra Linear I, e muitas vezes essas matrizes de mudança são chamadas de **matrizes-identidade** de uma base pra outra.

Vamos voltar a utilizá-las agora. Se quisermos mudar a base de uma transformação, podemos somente utilizar **matrizes de mudança de base** para fazer isso.

Entretanto, isso só funciona para **operadores lineares**, que levam um vetor de um subespaço para o próprio subespaço.

Por exemplo, se temos uma $[T]_{BC}$ e quisermos essa transformação da base C para a própria base C, temos que fazer:

$$[T]_C \cdot [v]_C = [T]_{BC} \cdot M_{C,B} \cdot [v]_C$$

$$[T]_C \cdot [v]_C = [T]_{BC} \cdot [v]_B$$

$$[T]_C \cdot [v]_C = [w]_C$$

E assim, a matriz de mudança de base, que parecia não ter utilidade em Álgebra Linear I, mostra-se útil. Agora, se quisermos transformar uma $[T]_B$ em uma $[T]_C$, precisaremos fazer:

$$[T]_C = M_{B,C} \cdot [T]_B \cdot M_{C,B}$$

Lembrando que $M_{C,B} = M_{B,C}{}^{-1}$, podemos concluir que essa igualdade é válida usando a mesma dedução de anteriormente.

h. Matrizes Semelhantes
Dizemos que duas matrizes A e B são semelhantes se:

I. $\det A = \det B$

II. $A = P^{-1}BP$, onde P é uma **matriz de mudança de base**.

2. Autovalores e Autovetores

Dizemos que λ é um **autovalor** de T se e somente se, para algum $v \in V$:

$$T(v) = \lambda v$$

Nesse caso, dizemos que v é **autovetor** de T.

Mas repare que, se **assumirmos** que v é um **autovetor** de T, qualquer múltiplo de v também será. Veja o que ocorre para μv, com $\mu \in \mathbb{R}$:

$$T(\mu v) = \mu\, T(v) = \mu\,(\lambda v) = \lambda\,(\mu v)$$

Ainda, se **assumirmos** que existem dois vetores distintos, v e w, que são **autovetores** associados ao autovalor λ, ou seja, $T(v) = \lambda v$ e $T(w) = \lambda w$, o vetor que é resultado da soma de v com w também será autovetor:

$$T(v + w) = T(v) + T(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v + w)$$

Então, se existe um grupo de autovetores, qualquer **combinação linear** entre eles também será um autovetor. Com isso, podemos definir o **autoespaço**.

a. Autoespaço

Define-se o autoespaço associado ao autovalor λ pelo conjunto de vetores que, como vimos acima, são autovetores associados ao autovalor λ:

$$E(\lambda) = \{todos\ v \in V : T(v) = \lambda v\}$$

Note que podemos mostrar o seguinte:

$$T(v) = \lambda v \iff T(v) = \lambda I(v)$$

$$\iff T(v) - \lambda I(v) = 0_V \iff (T - \lambda I)(v) = 0_V$$

Então podemos escrever que:

$$E(\lambda) = Ker(T - \lambda I)$$

b. Polinômio Característico

Ele é um meio de encontrar todos os autovalores de uma transformação. Sua definição é feita a partir da matriz da transformação, do seguinte modo:

$$p_T(t) = det([T] - tI)$$

As raízes desse polinômio correspondem a **todos** os autovalores.

c. Encontrando os Autoespaços

Após encontrar os autovalores pelo polinômio característico, podemos encontrar os autovetores resolvendo um **sistema linear homogêneo**.

Seja λ um autovalor encontrado, podemos encontrar os autoespaços calculando $Ker(T - \lambda I)$.

Em resumo, tomamos a **matriz** da transformação, **subtraímos** λ de todos os elementos da diagonal principal da matriz da transformação e, então, calculamos o **núcleo** da matriz resultante.

d. Multiplicidade Algébrica

Sabe-se que o polinômio característico é do seguinte modo:

$$p_T(t) = (t - \lambda_1)^{r_1}(t - \lambda_2)^{r_2} \dots (t - \lambda_m)^{r_p}$$

Repare que temos m autovalores distintos: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Definimos a **multiplicidade algébrica** de λ_i como o expoente do monômio correspondente ao autovalor λ_i.

Desta forma, a multiplicidade algébrica de λ_1 é r_1, a de λ_2 é r_2 e assim por diante.

Repare agora que o grau do polinômio é a soma dos expoentes, ou seja, $r_1 + r_2 + \cdots + r_p$. Entretanto, podemos considerar que esse polinômio pertence ao operador $T: V \to V$ e que a dimensão de V é n.

Como o grau do polinômio característico **coincide** com a dimensão do espaço V, então $r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n$.

e. Multiplicidade Geométrica
Considere o polinômio característico do texto acima. A **multiplicidade geométrica** é definida como a **dimensão do autoespaço**. Então, se:

$$\begin{gathered} \dim\big(E(\lambda_1)\big) = \alpha_1 \\ \dim\big(E(\lambda_2)\big) = \alpha_2 \\ \vdots \\ dim\big(E(\lambda_n)\big) = \alpha_n \end{gathered}$$

A multiplicidade geométrica de λ_1 é α_1, a de λ_2 é α_2 e assim por diante.

3. Operadores Diagonalizáveis

Dizemos que um operador é **diagonalizável** se for possível construir uma base constituída somente com seus autovetores.

a. Condições para Diagonalização

Quando calculamos a **multiplicidade geométrica**, ela pode **ou não** ser igual à **multiplicidade algébrica**, mas nunca superior. Sinteticamente:

$$\text{Multiplicidade geométrica} \leq \text{Multiplicidade algébrica}$$

Para podermos diagonalizar, necessitamos de uma base de autovetores tal que, se o espaço tiver dimensão n, precisaremos de n autovetores LI.

Sobre multiplicidades, sabemos o seguinte (sendo α_i a multiplicidade geométrica e r_i a algébrica):

$$\begin{cases} \alpha_i \leq r_i \\ r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n \end{cases}$$

Para ocorrer a diagonalização, a soma das dimensões dos autoespaços deve ser igual a n, pois isso equivale a dizer que teremos n autovetores LI.

Pelo que vimos acima, como $\alpha_i \leq r_i$ e $r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n$, isso só será possível se $\alpha_i = r_i$, ou seja, a multiplicidade algébrica for **igual** à geométrica.

Em resumo, para podermos diagonalizar, deve valer:

I. Todas as raízes do polinômio característico devem ser **reais**;

II. As multiplicidades geométricas devem **coincidir** com as algébricas.

b. Algoritmo de Diagonalização

Considere $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Para diagonalizar, seguimos o seguinte algoritmo:

I. Retirar os **autovalores** da matriz de transformação;

II. Encontrar **autoespaços** (e autovetores, por consequência). Organize os autovetores numa **base**. Considere que montamos $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$;

III. Escrever a **matriz** do operador com relação à base de autovetores. Essa matriz será diagonal, com os autovalores na diagonal:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

III. Escrever, então a matriz de mudança de base. Considere que você possuía a matriz do seu operador com relação a uma base B, então você tinha $[T]_B$. Devemos escrever a matriz $M_{B,C}$.

Então, podemos usar **composição de transformações**, e chegar na relação:

$$M_{B,C} \cdot [T]_B = [T]_C \cdot M_{B,C}$$

Mas como $[T]_B = D$, pois essa é a matriz relativa à base de autovetores, temos finalmente que:

$$[T]_C = M_{B,C} \cdot D \cdot \left(M_{B,C}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow [T]_C = M_{B,C} \cdot D \cdot M_{C,B}$$

Então, conseguimos escrever a matriz $[T]_C$ usando uma matriz diagonal e outras duas matrizes auxiliares.

c. Potências de Matrizes

Se tivermos a seguinte relação:

$$A = M \cdot D \cdot M^{-1}$$

Vale que:

$$A^n = (M \cdot D \cdot M^{-1})^n = M \cdot D \cdot M^{-1} \cdot M \cdot D \cdot M^{-1} \cdot \ldots \cdot M \cdot D \cdot M^{-1}$$

Como $M^{-1} \cdot M = I$ e a identidade multiplicada por qualquer matriz resulta na própria matriz:

$$A^n = M \cdot D^n \cdot M^{-1}$$

Mas se D for diagonal, fica mais simples a relação, pois:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow D^r = \begin{bmatrix} \lambda_1^r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^r \end{bmatrix}$$

d. Operadores Lineares Simétricos

Seja V um espaço vetorial com produto interno usual. Definimos um **operador linear simétrico** como um operador $T: V \to V$ que respeita a condição:

$$< T(u), v > = < u, T(v) >$$

Chamamos esse operador de simétrico porque, quando escrevemos a matriz $[T]_B$ em relação a uma base B **ortonormal**, essa matriz é **simétrica**, ou seja:

$$[T]_B = [T]_B{}^t$$

Outra propriedade importante de operadores lineares simétricos é que podemos escrever uma base **ortonormal** de V formada somente com autovetores de T.

Nesse caso, a matriz formada pelos autovetores dessa base ortonormal será uma matriz **ortogonal**, tal que:

$$M^t = M^{-1}$$

Por isso, se estivermos lidando com operadores lineares simétricos, podemos assumir que a seguinte igualdade é válida:

$$M^t [T]_B M = D$$

Onde D é uma matriz **diagonal** e B é uma **base** de V.

Portanto, caso tenhamos um operador linear simétrico T com dois autovetores u e v, associados respectivamente aos autovalores α e β:

$$\text{Se } \alpha \neq \beta, u \perp v$$

Lista de Exercícios

1. Matriz de Transformação

P1 2017 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 1

Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sejam f_1, f_2 e $f_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ definidas por:

$$f_1(t) = \sin(2t),\ \ f_2(t) = \cos(2t) \text{ e } f_3(t) \ = \ e^{-t}$$

Para qualquer $t \in \ \mathbb{R}$. Temos que:

$$B = \{f_1, f_2, f_3\}$$

É uma base do subespaço vetorial V de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gerado por B. Se $T\colon V \to V$ for a transformação linear definida por:

$$T(f) = f'$$

Para qualquer $f \in V$, então $[T]_B$ será igual a

A. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. Matriz de Transformação

P1 2017 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 13

Considere a base $B = \{(1,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Em que C denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos que $T(2,-1)$ é igual a:

A. $(5,-7,-7)$
B. $(3,-3,-1)$
C. $(-1,-7,-7)$
D. $(3,-5,-1)$
E. $(5,-1,-7)$

3. Matriz de Transformação

P2 2016 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 7

Considere as bases $B = \{(1,1),(1,0)\}$ e $C = \{1, t + t^2, t^2, t^2 + t^3\}$ dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $P_3(\mathbb{R})$, respectivamente. Se $T: \mathbb{R}^2 \to P_3(\mathbb{R})$ é a transformação linear tal que:

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Então $T(0,1)$ é igual a:

A. $3 + t - t^2 - 3t^3$
B. $3 + t - 3t^2 - 3t^3$
C. $-3 - t + t^2 + 3t^3$
D. $-3 - t - 3t^2 + 3t^3$
E. $t + 2t^2 + 3t^3$

4. Composição de Matrizes

P2 2015 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 8

Considere as bases $B = \{1, x, x^2\}$ e $C = \{(1,1,1). (1,1,0), (0,-1,0)\}$ dos espaços vetoriais $P_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $F: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$[F]_{BC} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

E seja $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por:

$$G(x, y, z) = (z, x - y, y - 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}$$

Se can denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$, então a soma das entradas da diagonal principal da matriz $[G \circ F]_{B,can}$ é igual a:

A. -4
B. 0
C. 4
D. 6
E. 8

5. Autovalores

P2 2016 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 9

Considere as bases $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ e $C = \{(3,2),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que:

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}$$

Se λ e μ denotam os dois autovalores de T, então $\lambda + \mu$ é igual a:

A. 4
B. -4
C. -8
D. 0
E. 8

6. Multiplicidades Algébrica e Geométrica

P2 2017 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 13

Seja $T: V \to V$ um operador linear, em que V é um espaço vetorial de dimensão 7. Considere as seguintes afirmações:

I. Se 4 for um autovalor de T com multiplicidade algébrica igual a 3, então existirá um subconjunto linearmente independente $\{v, w, z\}$ de V com três elementos, tal que $T(v) = 4v$, $T(w) = 4w$ e $T(z) = 4z$;

II. Se todas as raízes complexas do polinômio característico de T forem reais, então a soma das multiplicidades geométricas dos autovalores de T será igual a 7;

III. Se 20, 30 e 40 forem autovalores de T, a multiplicidade geométrica do autovalor 20 for igual a 3 e a multiplicidade algébrica do autovalor 30 for igual a 3, então a multiplicidade geométrica do autovalor 40 será igual a 1.

Assinale a alternativa correta:

A. Apenas as afirmações II e III são necessariamente verdadeiras;
B. Apenas as afirmações I e III são necessariamente verdadeiras;
C. Apenas a afirmação II é necessariamente verdadeira;
D. Apenas a afirmação III é necessariamente verdadeira;
E. Nenhuma das afirmações é necessariamente verdadeira.

7. Autoespaços

P2 2016 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 4

Denote por I o operador identidade de $\mathbb{R}^4$ e seja $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear tal que:

$$Ker(T) = [(1,2,0,0),(0,-1,0,1)], \quad Ker(T-2I) = [(0,0,0,1)],$$

$$Ker(T-3I) = [(1,0,1,1)].$$

Temos que $T(2,1,2,0)$ é igual a:

A. $(-3,0,-3,-3)$
B. $(1,3,0,1)$
C. $(6,0,6,4)$
D. $(0,-1,-1,2)$
E. $(2,0,2,1)$

8. Operadores Lineares, Autovalores e Autovetores

P1 2017 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 4

Sejam V um espaço vetorial, $T: V \to V$ um operador linear, $v, w \in V$ autovetores de T associados, respectivamente, aos autovalores $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações:

I. Se $v + w$ for um autovetor de T, então $\lambda = \mu$;

II. Se T for bijetor, então $\lambda \neq 0$ e $\frac{1}{\lambda}$ será um autovalor de T^{-1};

III. O operador $T \circ T + I$ não tem autovalores, em que I denota o operador identidade de V.

Assinale a alternativa correta:

A. Apenas as afirmações I e II são necessariamente verdadeiras;
B. Apenas as afirmações I e III são necessariamente verdadeiras;
C. Apenas a afirmação II é necessariamente verdadeira;
D. Apenas a afirmação I é necessariamente verdadeira;
E. Apenas as afirmações II e III são necessariamente verdadeiras.

9. Diagonalização

P1 2017 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 8

Sejam V um espaço vetorial de dimensão 4 e $T: V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico seja dado por:

$$p_T(t) = t(t-1)^2(t+2)$$

Denote por I o operador identidade de V e considere as seguintes afirmações:

I. Se $dim(Ker(T)) + dim(Ker(T-I)) = 3$, então o operador T será diagonalizável;

II. Se $Ker(T-I) + Ker(T+2I) + Ker(T) = V$, então o operador T será diagonalizável;

III. Se o operador T for diagonalizável, então T será bijetor.

Assinale a alternativa correta:

A. Apenas a afirmação III é necessariamente verdadeira;
B. Apenas as afirmações I e II são necessariamente verdadeiras;
C. Apenas as afirmações I e III são necessariamente verdadeiras;
D. Apenas as afirmações II e III são necessariamente verdadeiras;
E. Apenas a afirmação I é necessariamente verdadeira.

10. Diagonalização

P1 2017 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 5

Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,0,1), v_3 = (1,1,0)$$

Sejam autovetores de T associados, respectivamente, aos autovalores:

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 0$$

Denote por can a base canônica de $\mathbb{R}^3$. A soma das entradas da primeira linha da matriz $[T]_{can}$ é igual a:

A. 1
B. 2
C. -1
D. 0
E. -2

11. Diagonalização

P2 2016 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 12

Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dada a seguinte matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

A sua inversa é:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Então a soma das duas entradas na primeira linha da matriz A^{79} é igual a:

A. $\frac{1}{6}(1 - 2 \cdot 2^{-79})$
B. $\frac{1}{6}(1 + 5 \cdot 2^{-79})$
C. $\frac{1}{6}(5 + 5 \cdot 2^{-79})$
D. $\frac{1}{6}(1 - 2^{-79})$
E. $\frac{1}{6}(5 - 2^{-79})$

12. Autovalores e Autovetores

P1 2017 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 7

Sejam $n \geq 1$ um inteiro e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Considere as seguintes afirmações:

I. se A e B forem semelhantes, então A e B terão o mesmo polinômio característico;

II. se A e B tiverem o mesmo polinômio característico, então A e B terão os mesmos autovalores;

III. se A e B tiverem os mesmos autovalores, então A e B serão semelhantes.

Assinale a alternativa correta:

A. Todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
B. Apenas a afirmação II é necessariamente verdadeira;
C. Apenas as afirmações I e II são necessariamente verdadeiras;
D. Apenas as afirmações I e III são necessariamente verdadeiras;
E. Apenas as afirmações II e III são necessariamente verdadeiras.

13. Operador Linear Simétrico

P2 2016 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 8

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno $<\cdot,\cdot>$ e seja $T: V \to V$ um operador linear. Considere as seguintes afirmações:

I. Se o operador T é simétrico, então a matriz $[T]_B$ é simétrica, para qualquer base B de V;

II. Se existe uma base ortogonal de V formada por autovetores de T, então o operador T é simétrico;

III. Se $< T(v), w >=< v, w >$, para todos $v, w \in V$, então o operador T é simétrico.

Assinale a alternativa correta:

A. Todas as afirmações são necessariamente verdadeiras;
B. Apenas a afirmação II é necessariamente verdadeira;
C. Apenas as afirmações I e II são necessariamente verdadeiras;
D. Apenas as afirmações I e III são necessariamente verdadeiras;
E. Apenas as afirmações II e III são necessariamente verdadeiras.

14. Operador Linear Simétrico

P1 2016 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 3

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do seu produto interno usual e as bases $B = \{(1,0),(1,1)\}$ e $C = \{(1,-1),(0,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Se $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $U: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são os operadores lineares tais que

$$[T]_{BC} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } [U]_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Então:

A. T é simétrico e U não é simétrico;
B. T e U são ambos simétricos e têm polinômios característicos diferentes;
C. T não é simétrico e U é simétrico;
D. T e U são ambos simétricos e têm o mesmo polinômio característico;
E. Nem T nem U são simétricos.

15. Operador Linear Simétrico

P1 2016 Álgebra Linear II Poli USP, Exercício 3

Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do seu produto interno usual e sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaz a seguinte relação for simétrico:

$$T(1,1,0) = (1,a,b), \quad T(1,-1,0) = (2,4,c), \quad T(0,0,1) = (3,5,6)$$

Então $a + b + c$ é igual a:

A. $10\sqrt{2}$
B. 8
C. 10
D. $2 + 8\sqrt{2}$
E. 1