www.estudar.com.vc

Resumo e Lista de Exercícios

Probabilidade

Fuja do Nabo P1 2018.2

Resumo

1. Métodos de Contagem

Os Métodos de Contagem permitem contar o número de elementos de um determinado conjunto, de forma indireta (ou seja, sem somar elemento por elemento).

a. Permutação

A permutação ocorre quando há, dentro de um conjunto, elementos que são trocados entre si.

A equação abaixo identifica quantas formas diferentes o conjunto pode assumir, tendo em vista as trocas ocorridas. Se n é o número de elementos diferentes do conjunto, a permutação desses n elementos é:

$$P_n = n!$$

Note que, se houverem k elementos repetidos no conjunto, a permutação deverá descontar as trocas entre tais elementos, ou seja:

$$P_{n,k} = \frac{n!}{k!}$$

b. Arranjos

O arranjo é utilizado quando temos um conjunto com N elementos e queremos saber quantos subconjuntos diferentes (com n elementos) podemos formar (desde que $n < N$).

A ordem dos elementos no subconjunto importa (por exemplo, um subconjunto $\{A; B\}$ é diferente de um subconjunto $\{B; A\}$). O número de arranjos de um conjunto com N elementos, tomados n a n, é:

$$A_{N,n} = (N)_n = \frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1)\dots(N-n+1)$$

c. Combinação

A combinação é utilizada na mesma situação dos arranjos, mas a ordem dos elementos no subconjunto não importa. Por exemplo, um subconjunto $\{A; B\}$ e um subconjunto $\{B; A\}$ são iguais.

Desta forma, a combinação de N elementos, n a n (pode-se ler também como "N escolhe n") será:

$$C_{N,n} = \binom{N}{n} = \frac{(N)_n}{P_n} = \frac{(N)_n}{n!} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

2. Probabilidades

a. Probabilidade da União

A Probabilidade da União é utilizada para calcular a probabilidade de um evento $\boldsymbol{A}$ e um evento $\boldsymbol{B}$ ocorrerem em uma mesma ocasião. Essa probabilidade é calculada como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

b. Probabilidade Condicional

A Probabilidade Condicional é utilizada para calcular a probabilidade de um evento A ocorrer, dado que outro evento $\boldsymbol{B}$ já ocorreu.

Por isso, essa probabilidade é dada pela razão entre a probabilidade da ocorrência da intersecção dos eventos, pela probabilidade de somente o evento $\boldsymbol{B}$ ocorrer:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

c. Regra da Multiplicação para $P(A \cap B)$:

Por conta da regra acima, a probabilidade da ocorrência da intersecção entre dois eventos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ é:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$$

d. Independência

Dois eventos A e B são ditos independentes se a ocorrência de um não interfere na ocorrência de outro.

Por isso, a probabilidade de ocorrer A dado que ocorreu B é, simplesmente, a probabilidade de ocorrer A:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

Ou seja, a probabilidade da ocorrência da intersecção entre os eventos é:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

e. Teorema da Probabilidade Total

O Teorema da Probabilidade Total diz que a probabilidade de um evento B ocorrer é a soma da probabilidade de todas as intersecções do próprio evento B com as partições do evento A (A_i):

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(\, B \mid A_i \,) \cdot P(A_i)$$

f. Teorema de *Bayes*

Sejam dois eventos A e B, e A_i uma partição do evento A. De acordo com o Teorema de *Bayes*, a seguinte relação é verdadeira:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(B)}$$

Ou, usando o Teorema da Probabilidade Total:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B \mid A_n)}$$

g. Probabilidade Complementar

Considere um evento A e seu complemento, A^C, tal que a união dos eventos gera o espaço amostral S:

$$A \cup A^C = S$$

A probabilidade do evento complementar A^C ocorrer é:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

3. Variáveis Aleatórias Discretas

Uma Variável aleatória é discreta se ela é enumerável (ou seja, podemos listar cada valor que a variável pode assumir, por exemplo, x_1, x_2, até um x_n, que é o valor final assumido).

Variáveis aleatórias discretas podem progredir até o infinito, de forma que a lista de valores continua indefinidamente.

a. Distribuição de Probabilidade

A probabilidade de a variável aleatória X assumir um valor x, dentro de um espaço amostral S (cujos elementos são s) é:

$$P[X = x] = P\ (para\ todos\ s \in S : X(s) = x)$$

b. Distribuição Acumulada

A distribuição acumulada considera a possibilidade da variável aleatória X assumir qualquer valor menor ou igual a um x.

Isso é dado pela somatória de todas as probabilidades em que X assume valores y, para todo $y \leq x$:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y:\, y \leq x} P[X = y]$$

c. Propriedades

A probabilidade da variável aleatória X assumir um valor x está entre 0 (no mínimo) e 1 (no máximo):

$$0 \leq P[X = x] \leq 1$$

Além disso, a soma de todas as probabilidades em que X assume valores x, para todos os x dentro do espaço amostral S, é 1:

$$\sum_{todos\ os\ possíveis\ x} P[X = x] = 1$$

4. Variáveis Aleatórias Contínuas

Uma variável aleatória X é contínua se os valores que ela pode assumir pertencem a um intervalo (ou seja, existem infinitas possibilidades de valores x que ela pode assumir, desde que pertençam a esse intervalo).

a. Densidade de Probabilidade

Para as variáveis aleatórias contínuas, fala-se em função densidade de probabilidade (abreviada por f.d.p.), tal que:

I. A função $f(x)$ é sempre positiva (ou nula):

$$f(x) \geq 0 \text{ para todo } x;$$

II. A integral da f.d.p., de menos infinito até infinito, vale 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1 \text{ (área sob o gráfico de } f(x));$$

III. E a probabilidade da variável aleatória X estar dentro de um intervalo $[a; b]$ é dada pela integral da f.d.p., de $\boldsymbol{a}$ até $\boldsymbol{b}$:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, \text{ com } a \leq b.$$

b. Distribuição Acumulada

Assim como no caso discreto, a distribuição acumulada representa a probabilidade de X assumir qualquer valor menor ou igual a x.

No entanto, no caso contínuo, a distribuição acumulada é dada por uma função $F(x)$, dada pela integral da f.d.p., de menos infinito até o valor x:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Assim, a função distribuição acumulada representa a primitiva da função densidade de probabilidade, tal que:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

c. Propriedades

A probabilidade da variável aleatória X ser maior do que um valor a é a probabilidade complementar ao caso em que X é menor ou igual ao valor a (que é dado pela função distribuição acumulada em a):

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$

A probabilidade de X estar entre a e b é dada pela integral de $f(x)$, limitada pelos extremos a e b. Portanto, isso é igual à primitiva $F(x)$, calculada em b, menos a primitiva calculada em a:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Por fim, a probabilidade de X ser algum ponto c do intervalo é nula:

$$P(X = c) = \int_c^c f(x)dx = 0$$

5. Medidas Descritivas

Em Probabilidade, dada uma distribuição contínua ou discreta, calculamos algumas medidas descritivas que identificam as principais métricas da população, em relação a sua posição ou sua dispersão.

a. Valor Médio ou Esperança

É o valor esperado (E) para a variável aleatória ou função.

No caso de distribuições discretas, o valor esperado da variável é:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot P[X = x_i]$$

De forma similar, considerando a mesma distribuição, o valor esperado de uma função $\boldsymbol{g(x)}$ qualquer é:

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{N} g(x_i) \cdot P[X = x_i]$$

No caso contínuo, o valor esperado da variável x é dado pela seguinte integral:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Enquanto o valor esperado de uma função $f(x)$ é:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx$$

O valor esperado pode ser interpretado como uma medida da localização do centro da variável aleatória.

A função de esperança é linear, e, por isso, ela apresenta as seguintes propriedades:

I. Dadas uma constante $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ e uma constante $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$, a seguinte propriedade é válida:

$$E(aX + b) = a \cdot E(X) + b$$

II. O valor esperado da soma de duas variáveis aleatórias X_1 e X_2 é a soma dos valores esperados de X_1 e X_2:

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

III. Considere duas variáveis aleatórias independentes, X e Y. O valor esperado do produto das variáveis é o produto dos valores esperados:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

b. Variância

A variância ($\sigma^2(X)$ ou $Var(X)$) é uma medida da variabilidade da distribuição de uma variável aleatória. O cálculo da variância utiliza o conceito de valor esperado:

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Algumas propriedades da variância são:

I. Se a é uma constante real, então:

$$Var(X + a) = Var(X)$$

II. Se a é uma constante real, então:

$$Var(aX) = a^2 Var(X)$$

III. Se X e Y são variáveis aleatórias independentes, a variância da soma das variáveis é a soma das variâncias:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

c. Desvio Padrão

O desvio padrão (σ) mede a dispersão entre a variável aleatória e a média:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$$

d. Momento da Função

O momento de ordem $\boldsymbol{k}$ de uma função é definido pela seguinte equação:

I. Para o caso discreto:

$$E[X^k] = \sum_{i=1}^{N} {x_i}^k \cdot P[X = x_i]$$

II. Para o caso contínuo:

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx$$

A esperança de uma função é o momento de primeira ordem dela, enquanto a variância é a diferença entre o momento de segunda ordem e o quadrado do momento de primeira ordem.

6. Distribuições Unidimensionais Discretas

Existem algumas distribuições de variáveis aleatórias discretas que, por serem muito comuns, devem ser estudadas.

a. Binomial

A distribuição binomial ocorre quando temos n experimentos que resultam somente em sucessos (S) ou falhas (F) (ou seja, n ensaios de *Bernoulli*).

Sendo a probabilidade de sucesso $P(S) = p$ (e, portanto, $P(F) = 1 - p$) e x o número de sucessos, a probabilidade de ocorrerem x sucessos é:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Usamos a notação $X \sim b(n, p)$ quando a variável X assume uma distribuição binomial.

O valor esperado de X é dado por:

$$E(X) = np$$

E a variância de X é:

$$\sigma^2(X) = np(1-p)$$

b. Geométrica

A distribuição geométrica ocorre quando existe uma sequência de ensaios de *Bernoulli* até que ocorra o primeiro sucesso.

Portanto, x ensaios são realizados até que ocorra o primeiro sucesso. A probabilidade de ocorrer sucesso no x-ésimo ensaio é:

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1} p$$

A notação utilizada para quando uma variável X tem distribuição geométrica é $X \sim Geo(p)$.

O valor esperado, nesta distribuição, é:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

E a variância é:

$$\sigma^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

c. *Poisson*

A distribuição de *Poisson* possui um parâmetro positivo λ que representa a taxa de ocorrência por unidade medida.

A probabilidade da variável aleatória assumir um valor x é:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Nos casos em que n é um número grande e p é um número pequeno, podemos utilizar uma distribuição de *Poisson* em que $\lambda = np$.

O valor esperado e a variância assumem o mesmo valor:

$$E(X) = \sigma^2(X) = \lambda$$

A notação utilizada para quando uma variável X tem distribuição de *Poisson* é $X \sim Poisson(\lambda)$.

7. Distribuições Unidimensionais Contínuas

As variáveis aleatórias contínuas possuem diferentes tipos de distribuição; algumas são mais comuns e estudadas no curso de Probabilidade.

a. Uniforme

A distribuição uniforme tem como principal característica a probabilidade igual de ocorrer qualquer fenômeno com mesmo comprimento.

A função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória que tem distribuição uniforme em um intervalo $[a; b]$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, a \leq x \leq b \\ 0, x > b \end{cases}$$

A notação utilizada para quando uma variável X tem distribuição uniforme é $X \sim U(a, b)$.

O valor esperado é:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Por sua vez, a variância é:

$$\sigma^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

b. Exponencial

A distribuição exponencial é caracterizada por ter uma taxa de falha constante. Seu parâmetro é um λ, e sua f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

A notação para quando uma variável aleatória X tem distribuição exponencial é $X \sim Exp(\lambda)$.

O valor esperado é calculado da seguinte forma:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

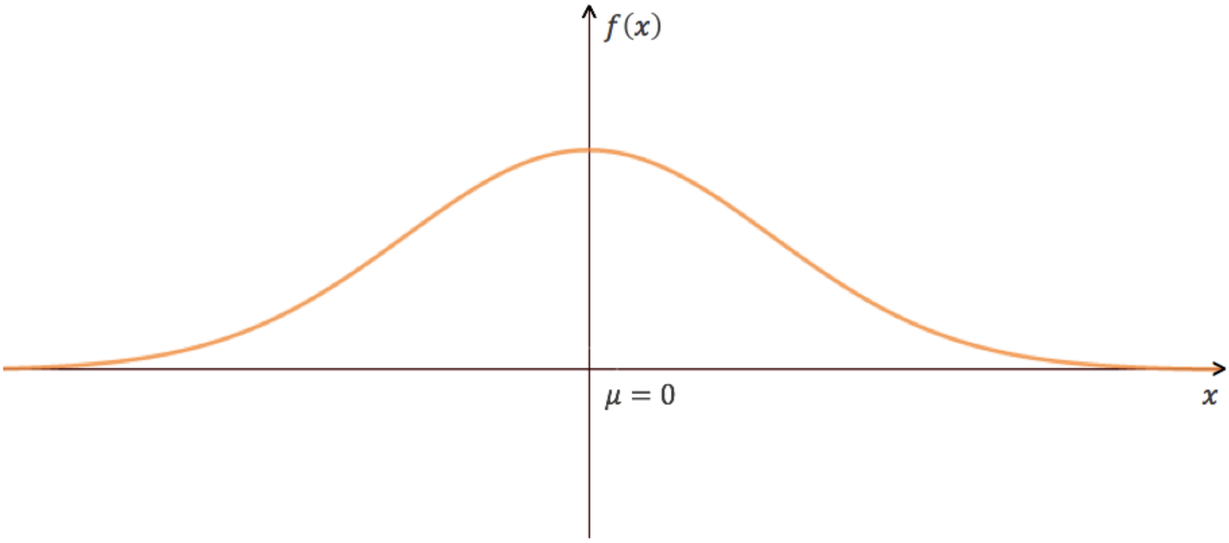
A variância é calculada da seguinte forma (note que, por isso, o desvio padrão é igual ao valor esperado):

$$\sigma^2(X) = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

c. Normal

A distribuição Normal é, talvez, a distribuição de probabilidades mais importante, visto que qualquer distribuição se aproxima da Normal quando há um número grande de dados.

A distribuição Normal padrão é simétrica e tem a seguinte forma:



A média e o desvio padrão da Normal padrão são:

$$\mu = 0 \text{ e } \sigma = 1$$

No entanto, uma variável X que apresenta distribuição Normal (ou seja, $X \sim N(\mu, \sigma)$), possui diferentes valor esperado e variância.

Nesse caso, o valor esperado é:

$$E(X) = \mu$$

E a variância é:

$$Var(X) = \sigma^2$$

A função de distribuição de probabilidades é dada como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

No entanto, a integral dessa função não é analiticamente resolvida. Para calcular a probabilidade de X estar em um determinado intervalo, cria-se uma variável z, tal que:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

E, com essa variável, a probabilidade é obtida pela tabela Normal (anexada no fim deste documento). A variável z tem distribuição Normal com média 0 e variância 1.

Para isso, considera-se que a probabilidade se divide igualmente entre os dois lados do gráfico da Normal; assim, a probabilidade de z ser negativo ou positivo é igual e vale $0{,}5$:

$$P(z < 0) = P(z > 0) = 0{,}5$$

Assim, a probabilidade de $P(0 < z < z_0)$ é fornecida pela tabela, dado um valor de z_0. Utiliza-se a simetria da distribuição para calcular probabilidades de intervalos diferentes. Por exemplo:

$$P(z < 2{,}3) = P(z < 0) + P(0 < z < 2{,}3) = 0{,}5 + P(0 < z < 2{,}3)$$

d. Teorema do Limite Central

Este teorema diz que, dado um número de dados muito grande (ou seja, n grande), a distribuição da média de uma distribuição qualquer tende a se aproximar de uma distribuição Normal.

Neste caso, o valor esperado dessa Normal aproximada vale:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

E a variância é calculada como:

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Assim, com n grande, a notação para a média de uma variável aleatória X que passa a ter distribuição Normal é: pelo Teorema do Limite Central, $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

8. Combinação Linear de Distribuições Normais

Suponha que existam duas variáveis X e Y com distribuição Normal, tal que:

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$$

$$Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$$

Seja também uma variável W definida por uma combinação linear das variáveis X e Y:

$$W = aX + bY, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Consequentemente, a variável W também tem distribuição Normal, com média μ_W e desvio padrão σ_W:

$$W \sim N(\mu_W, \sigma_W)$$

A média é calculada pela combinação linear das médias μ_X e μ_Y:

$$\mu_W = a\mu_X + b\mu_Y$$

E a variância é calculada da seguinte forma:

$$\sigma_W^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$$

9. Distribuições Multidimensionais

Distribuições multidimensionais ou conjuntas são utilizadas para situações em que mais de um resultado é observado em um experimento.

A probabilidade de um determinado evento envolve todas as variáveis, ou seja:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots)$$

Em Probabilidade, trabalha-se com apenas duas variáveis.

Dado um caso discreto, em que as variáveis X e Y são discretas, as seguintes propriedades se verificam:

$$0 \leq P(X = x, Y = y) \leq 1$$

$$\sum_x \sum_y P(X = x, Y = y) = 1$$

No caso contínuo, em que as variáveis X e Y são contínuas, a probabilidade é tal que:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

E são as seguintes propriedades que valem:

$$0 \leq f(x,y) < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx = 1$$

a. Probabilidades Marginais

Dada uma distribuição multidimensional, é possível retirar a distribuição unidimensional para uma variável.

Para isso, no caso discreto, para achar a probabilidade de $X = x$, devemos somar todas as probabilidades em que $Y = y$, para todos os y possíveis:

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

No caso contínuo, isso ocorre pela seguinte integral:

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot dy$$

b. Independência

Podemos dizer que duas variáveis são independentes, no caso discreto, se:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

No caso contínuo:

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

c. Distribuições Condicionais

A probabilidade de $X = x$, dado que $Y = y$, no caso discreto, é dada por:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

Se as variáveis são independentes, então: $P(X = x|Y = y) = P(X = x)$.

No caso contínuo, a função de distribuição de probabilidade condicional é:

$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)}$$

d. Esperança Condicional

O valor esperado de X, dado que $Y = y$, é calculado, no caso discreto, por:

$$E(X) = E[X|Y = y] = \sum_x x \cdot P(X = x|Y = y)$$

E, no caso contínuo, por:

$$E(X) = E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)\, dx$$

e. Média de uma Função sobre X e Y

O valor esperado de uma função $h(x, y)$, dada uma distribuição conjunta, é, no caso discreto:

$$E[h(X, Y)] = \sum_x \sum_y h(x, y) \cdot P(X = x, Y = y)$$

E, no caso contínuo:

$$E[h(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \cdot f(x, y)\, dy\, dx$$

f. Covariância e Correlação de X e Y

A covariância é uma medida que estima variabilidade conjunta de duas variáveis X e Y. A covariância ($Cov[X, Y]$) é calculada por:

$$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Uma importante propriedade da covariância é que, para $a > 0$ e $b > 0$, segue que:

$$Cov[aX, bY] = abCov[X, Y]$$

O coeficiente de correlação $\boldsymbol{\rho}$ estabelece uma razão entre a variação conjunta de X e Y (covariância) e o produto dos desvios padrões de cada variável:

$$\rho[X, Y] = \frac{Cov[X, Y]}{\sigma_x \sigma_y}$$

O coeficiente de correlação está entre -1 e 1:

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

As seguintes propriedades são válidas, para $a > 0$ e $b > 0$:

$$\rho[aX, bY] = \rho[X, Y]$$

$$\rho[-X, Y] = \rho[X, -Y] = -\rho[X, Y]$$

$$\rho[X, X] = 1$$

Lista de Exercícios

1. Espaço Amostral

P1 2018.1 Probabilidade Poli USP, Exercício 4 Adaptado

Um experimento consiste em jogar uma moeda duas vezes, e anotar os resultados independente da ordem. Por exemplo, anota-se $\{K, C\}$, independente de C ter saído antes de K. Se saírem duas caras, anota-se $\{K, K\}$. Para esse experimento, o espaço amostral é:

A. $\{\{K\}, \{C\}\}$
B. $\{\emptyset, \{K\}, \{C\}, \{K, K\}, \{C, C\}, \{K, C\}, \{C, C\}\}$
C. $\{\emptyset, \{K\}, \{C\}\}$
D. $\{\{K\}, \{C\}, \{K, K\}, \{C, C\}, \{K, C\}, \{C, C\}\}$
E. $\{\{K, K\}, \{C, C\}, \{K, C\}\}$

2. Teorema da Probabilidade Total

P1 2016 Probabilidade Poli USP, Exercício 1 Adaptado

Sabe-se que a probabilidade de a intensidade de radiação solar atingir um certo nível máximo é $\frac{1}{4}$ para dias chuvosos e $\frac{7}{8}$ para dias não chuvosos. Sabe-se também que para uma certa localidade a probabilidade de dia chuvoso é $\frac{9}{25}$. Qual a probabilidade de ocorrer esse valor máximo de radiação solar?

A. $0{,}09$
B. $0{,}65$

C. $0{,}56$
D. $0{,}78$
E. $0{,}25$

3. Teorema de *Bayes*

P1 2016 Probabilidade Poli USP, Exercício 6 Adaptado

O IPEM fez uma amostra de combustível em postos de gasolina. Sabe-se que 5% dos postos tem combustível adulterado. O teste do IPEM detecta adulteração em 90% dos casos em que a gasolina está adulterada. Em 5% dos casos erra e indica adulteração quando a gasolina está boa. Uma amostra ao acaso é testada e indica adulteração. Qual a chance da gasolina estar realmente adulterada?

A. $0{,}9000$
B. $0{,}0925$
C. $0{,}4865$
D. $0{,}0450$
E. $0{,}9800$

4. Variável Aleatória Discreta

P1 2016 Probabilidade Poli USP, Exercício 10 Adaptado

Seja X uma variável aleatória discreta com distribuição de probabilidade dada por $P[X = x] = ax$ para $x \in \{0,1,2,3,4,5\}$, sendo a uma constante. O valor de $P(X > 2)$ é:

A. $\frac{1}{5}$
B. $\frac{2}{5}$
C. $\frac{4}{5}$
D. $\frac{3}{5}$
E. $\frac{3}{4}$

5. Distribuição Acumulada, Caso Contínuo

P1 2016 Probabilidade Poli USP, Exercício 15 Adaptado

Uma variável aleatória X tem função distribuição de probabilidade dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax}, \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ , caso contrário} \end{cases}$$

Sendo $a > 0$ uma constante real. A probabilidade $P(X \geq \frac{1}{2a})$ vale:

A. e^{-a}
B. $e^{-1/2}$
C. $e^{-a/2}$
D. $e^{1/2}$
E. $e^{a/2}$

6. Distribuição de *Poisson*

P2 2016 Probabilidade Poli USP, Exercício 4 Adaptado

Considere uma variável aleatória distribuição de Poisson com parâmetro $4t$, em que t é um período de tempo fornecido, dado em horas. Esse tipo de variável é usado para representar solicitações de assistência em uma empresa de seguros: X é o número de pedidos de assistência em um intervalo de tempo t. Se os operadores da empresa tirarem meia hora de folga para almoço, qual a probabilidade de não perderem nenhum chamado de assistência?

A. e^2

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{e}$

D. $\frac{1}{e^2}$

E. $\frac{1}{\sqrt{e}}$

7. Distribuição Binomial

P2 2016 Probabilidade Poli USP, Exercício 6 Adaptado

Uma máquina de fabricar sorvete é bastante defeituosa. A probabilidade de ela apresentar defeito em uma hora qualquer é q. Em função disto, deve-se programar o momento de parada do equipamento para a manutenção preventiva do equipamento. Qual a probabilidade de não acontecer defeito nas primeiras k horas?

A. $1 - \sum_{j=1}^{k}(1-q)^{j}q$
B. $\sum_{j=1}^{k}(1-q)^{j-1}1$
C. qk
D. $(1-q)^{k}$
E. $(1-q)^{k}q$

8. Distribuição Normal

P2 2016 Probabilidade Poli USP, Exercício 8 Adaptado

Pacientes que adquirem o vírus H1N1 são submetidos a um tratamento intensivo, cujo tempo de cura foi modelado por uma variável aleatória normal de esperança 15 dias e desvio padrão 2 dias. O tempo mínimo necessário para que a probabilidade de cura de um paciente seja superior a 25% vale (em dias):

A. 15
B. 13
C. 12
D. 14
E. 11

9. Valor Esperado e Variância

P2 2017 Probabilidade Poli USP, Exercício 4 Adaptado

Seja uma variável aleatória X. Considere:

I. Se $X = 1$, então $E(X) = 1$
II. $E(X + 2X) = 3E(X)$
III. $V(X + 2X) = 5V(X)$

IV. $E(X^4) = V(X^2) + (V(X) + E(X)^2)^2$

Assinale a alternativa correta:

A. Apenas as afirmações II, III e IV são verdadeiras.
B. Apenas as afirmações I, III e IV são verdadeiras.
C. Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
D. Todas as afirmações são verdadeiras.
E. Apenas as afirmações I, II e IV são verdadeiras.

10. Transformação de Variáveis Aleatórias

P3 2016 Probabilidade Poli USP, Exercício 1 Adaptado

Sejam duas variáveis aleatórias contínuas independentes X e Y sobre as quais sabe-se que $E(X) = 10$, $\sigma(X) = 10$, $\sigma\ (Y) = 10$ e $E(XY) = 60$. Define-se uma nova variável W dada por $W = X^2 + Y^2$. Calcule o valor de $E(W)$.

A. 96
B. 136
C. 256
D. 200
E. 336

11. Distribuição Condicional

P3 2016 Probabilidade Poli USP, Exercício 3 Adaptado

O eixo de um motor precisa ter um determinado comprimento e diâmetro. Uma vez que o motor esteja montado, é possível medir o diâmetro do eixo, mas não o seu comprimento. Uma empresa produz eixos, cujos diâmetros e comprimentos estão distribuídos como descrito na tabela abaixo.

Diâmetro (⬇) Comprimento (➡)	$10\ cm$	$11\ cm$	$12\ cm$	$13\ cm$
$5\ mm$	$0{,}01$	$0{,}02$	$0{,}05$	$0{,}01$
$6\ mm$	0	$0{,}05$	$0{,}4$	$0{,}05$
$7\ mm$	$0{,}02$	$0{,}03$	$0{,}02$	$0{,}04$
$8\ mm$	$0{,}05$	$0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}05$

Dado que, para um certo motor montado, notou-se que o eixo tem o diâmetro $D = 6\ mm$, qual é a probabilidade de o comprimento ser $C = 12\ cm$?

A. $0{,}7$
B. $0{,}4$
C. $0{,}5$
D. $0{,}57$
E. $0{,}8$

12. Distribuição Condicional

P3 2016 Probabilidade Poli USP, Exercício 4 Adaptado

Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 2 bolas pretas. Duas bolas são retiradas sem reposição. Seja X o número de bolas vermelhas e Y o número de bolas pretas. Calcule a covariância $Cov(X, Y)$.

A. $-\frac{4}{5}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{9}{25}$

D. $-\frac{10}{25}$

E. $\frac{2}{25}$

Gabarito

1. Alternativa E.
2. Alternativa B.
3. Alternativa C.
4. Alternativa C.
5. Alternativa B.
6. Alternativa D.
7. Alternativa D.
8. Alternativa D.
9. Alternativa E.
10. Alternativa E.
11. Alternativa E.
12. Alternativa C.