www.estudar.com.vc

Resumo e Lista de Exercícios

Cálculo II

Fuja do Nabo P1 2018.2

Resumo

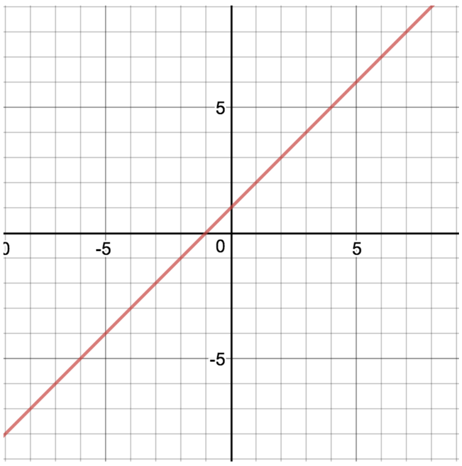
1. Cônicas

a. Retas

Equação reduzida:

$$y = ax + b$$

Representação geométrica:



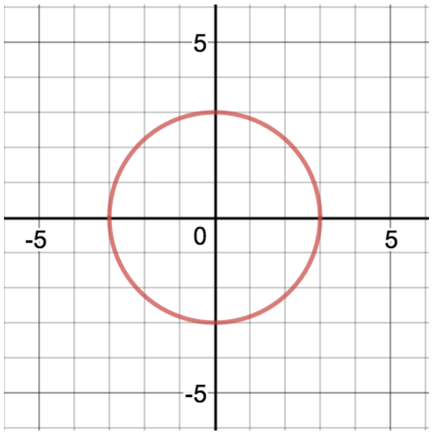
b. Circunferências

Equação reduzida:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

$(x_c, y_c) =$ centro da circunferência;
$r =$ raio da circunferência.

Representação geométrica:

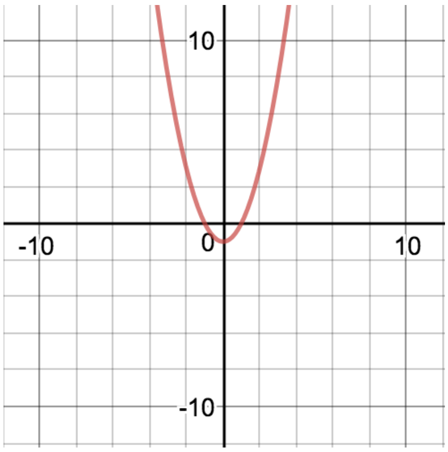


c. Parábolas

Equação reduzida:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Representação geométrica:



d. Elipses

Equação Reduzida:

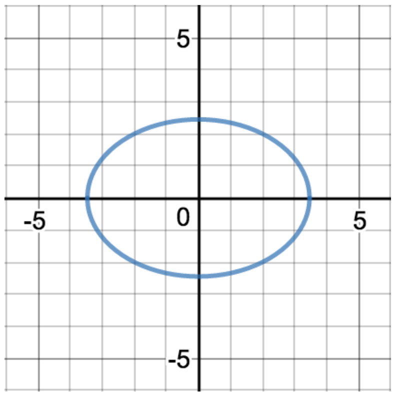
$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

$a =$ raio maior da elipse, na direção do eixo cuja variável é numeradora sobre a;

$b =$ raio menor da elipse, na direção do eixo cuja variável é numeradora sobre b;

$(x_c, y_c) =$ centro da elipse.

Representação geométrica:



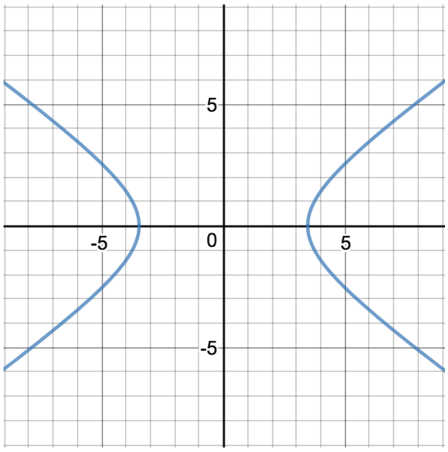
e. Hipérboles

Equação Reduzida:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

$a =$ distância entre o centro da hipérbole e o começo da figura, na direção do eixo cuja variável é numeradora sobre a;
$b =$ distância que o eixo cuja variável é numeradora sobre b varia conforme o outro eixo varia uma unidade;
(x_c, y_c) = centro da hipérbole.

Representação geométrica:



2. Funções de Duas Variáveis

$$z = f(x, y)$$

Definida em $\mathbb{R}^2$, apenas um valor de z para cada par (x, y).

a. Domínio de Função de Duas Variáveis
Valores que podem ser colocados nas variáveis controladas, exceto as restrições.

Domínio máximo: $\mathbb{R}^2$

Restrições no domínio:

I. Raízes → $Termo \geq 0$

II. Denominadores → $Termo \neq 0$

III. Denominadores em raízes → $Termo > 0$

IV. Logaritmos → $Termo > 0$

Gráfico do domínio: hachurar região dentro do domínio, tracejar fronteira não permitida.

b. Curva de Nível

A curva de nível k é tal que:

$$f(x, y) = k$$

Para cada k diferente, há uma equação de duas variáveis diferentes → Gráfico em $2D$ diferente.

3. Curvas

a. Definição Algébrica

A curva parametriza uma função de duas ou mais variáveis em uma região com menos variáveis.

$$\gamma = \big(x(t), y(t)\big)$$

Onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$

Respeitando:

$$y = f(x)$$

b. Parametrização

Trocar variáveis por um parâmetro comum, mantendo a relação entre elas.

Exemplo:

$$y = x$$

Parametrizando, temos:

$$x = t \Rightarrow y = t$$

$$\gamma = (t, t)$$

$$t \in \mathbb{R}$$

c. Parametrização por Coordenadas Polares

Provocar o aparecimento de $\sin t$ e $\cos t$, quando variáveis tiverem grau 2.

Exemplo:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Parametrizando:

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

$$\gamma = (\cos t\,, \sin t)$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

d. Curva por Interseção de Superfícies
Isolar uma variável e substituir na outra equação, parametrizando com duas variáveis em vez de três.

Exemplo:

$$S_1 \to x + y + z = 1$$

$$S_2 \to x + y - z = 0$$

$$\text{Em } S_1 \text{: } 2x + 2y = 1$$

Parametrizando:

$$x = t \to y = \frac{1 - 2t}{2}$$

$$z = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = \left(t, \frac{1 - 2t}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

e. Derivada de Curva

$$\gamma' = \big(x'(t), y'(t)\big)$$

ou

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right)$$

f. Vetor Tangente a uma Curva
O vetor tangente a uma curva no ponto (x_0, y_0) é qualquer múltiplo da derivada da curva, no ponto em questão:

$$\vec{v} = \lambda\gamma' = \lambda\big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$$

$$x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$$

g. Reta Tangente a uma Curva
A reta tangente a uma curva no ponto (x_0, y_0) é a soma de um ponto que pertence a reta com qualquer múltiplo da derivada da curva, no ponto em questão:

$$r: P + \lambda\gamma'$$

$$r: (x, y) = (x_P, y_P) + \lambda\big(x'(t_0), y'(t_0)\big)$$

4. Quádricas

Quádricas são formas em três dimensões (ou seja, considerando os eixos x, y e z).

a. Tipos de Quádricas
I. Elipsoides

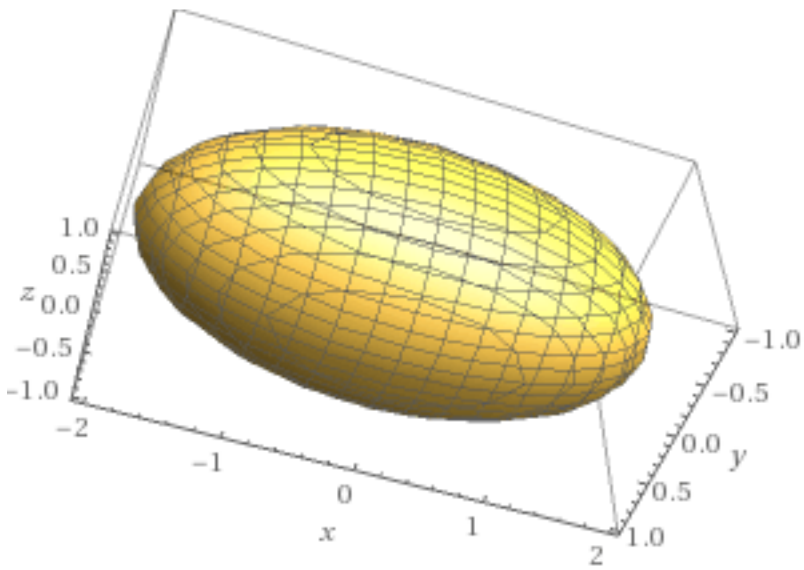
Equação reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

$a, b, c =$ raios do elipsoide na direção do eixo cuja variável é numeradora ao raio em questão;
$(x_c, y_c, z_c) =$ centro do elipsoide.

Todos os sinais positivos, 1 *na direita,* 3 *variáveis ao quadrado.*

Representação geométrica:



II. Hiperboloides de uma Folha
Equação reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}-\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

ou

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

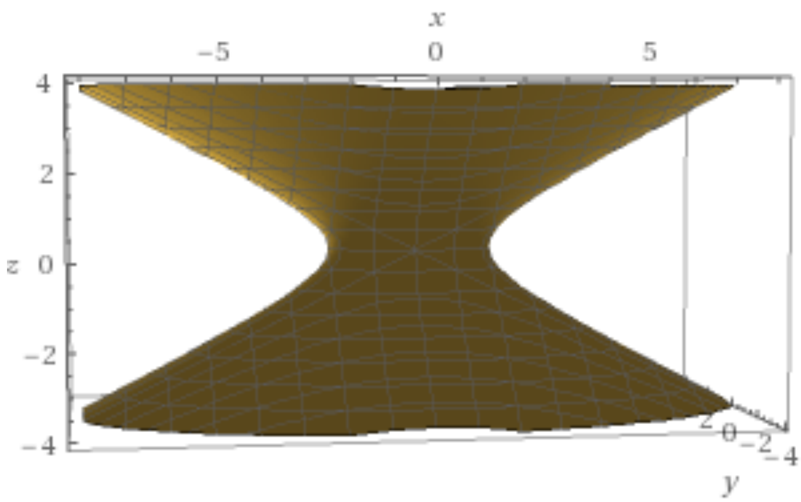
ou

$$-\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

$b, c =$ raios das elipses (curvas de nível);
$a =$ distância característica às hipérboles (curvas de nível);
$(x_c, y_c, z_c) =$ centro do hiperboloide.

Um sinal negativo, 1 *na direita,* 3 *variáveis ao quadrado.*

Representação geométrica:



III. Hiperboloides de Duas Folhas

Equação reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}-\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

ou

$$-\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

ou

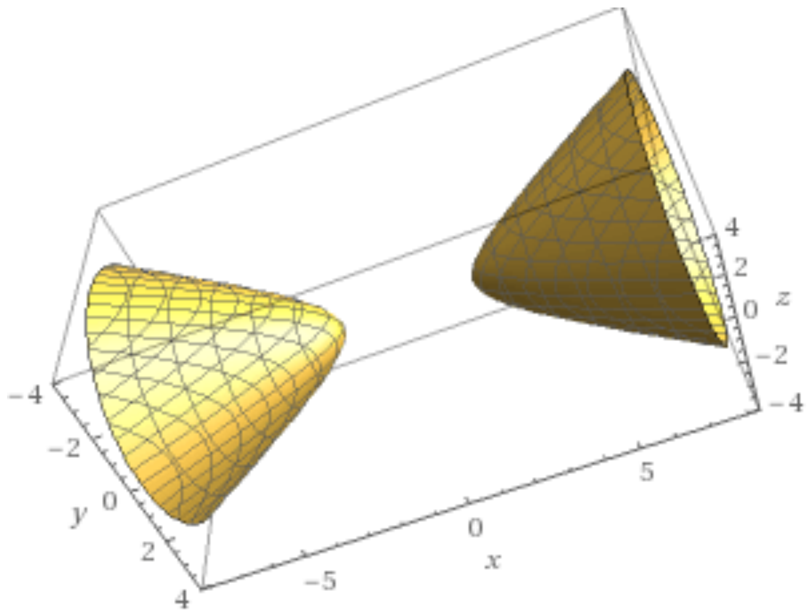
$$-\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}-\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=1$$

$a, b, c =$ distâncias características ao hiperboloide;

$(x_c, y_c, z_c) =$ centro do hiperboloide.

Dois sinais negativos, 1 *na direita,* 3 *variáveis ao quadrado.*

Representação geométrica:



IV. Paraboloides Elípticos

Equação reduzida:

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}=cz$$

ou

$$\frac{(y-y_c)^2}{a^2}+\frac{(z-z_c)^2}{b^2}=cx$$

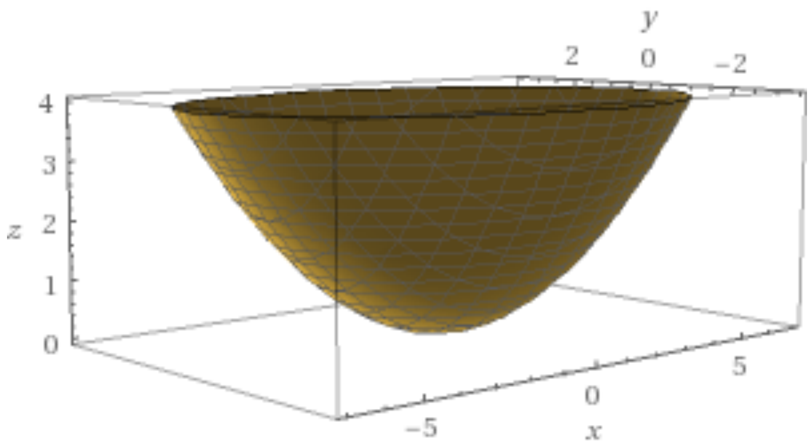
ou

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(z-z_c)^2}{b^2}=cy$$

$a, b =$ raios das curvas de nível (elipses);
$c =$ multiplicador da variável de grau 1;
$(x_c, y_c) =$ centro do paraboloide.

Sinais positivos, variável de grau 1 *na direita,* 2 *variáveis ao quadrado na esquerda.*

Representação geométrica:



V. Paraboloides Hiperbólicos (Sela)
Equação reduzida

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = cz$$

ou

$$\frac{(y-y_c)^2}{a^2} - \frac{(z-z_c)^2}{b^2} = cx$$

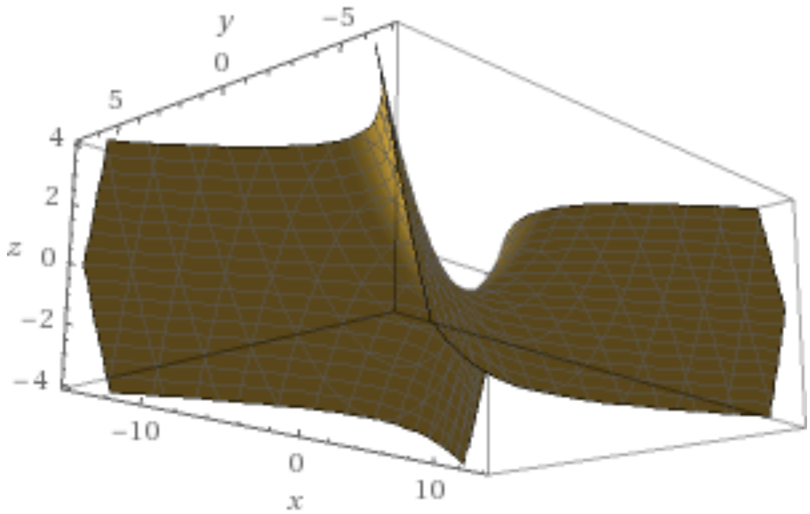
ou

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(z-z_c)^2}{b^2}=cy$$

$a, b =$ distância relativas às curvas de nível (hipérboles);
$c =$ multiplicador da variável de grau 1;
$(x_c, y_c) =$ centro do paraboloide.

Sinal negativo, variável de grau 1 na direita, 2 variáveis ao quadrado na esquerda.

Representação geométrica:



VI. Cones
Equação reduzida

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}-\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=0$$

ou

$$\frac{(x-x_c)^2}{a^2}-\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=0$$

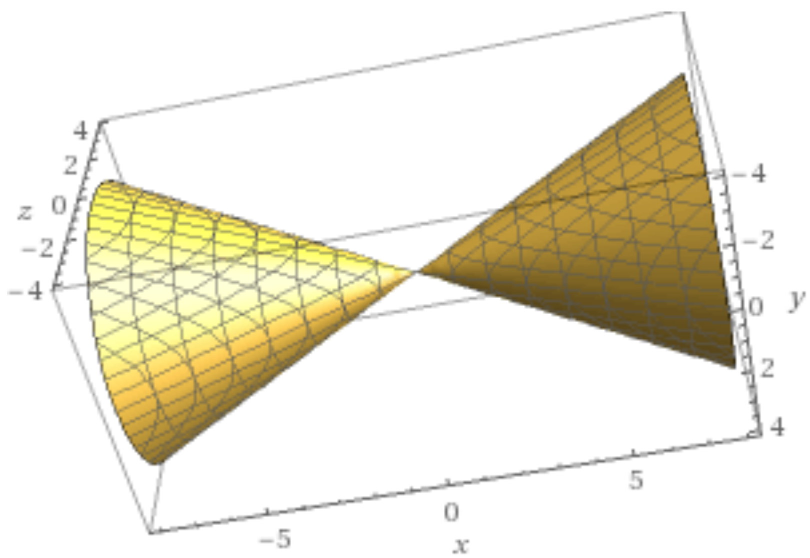
ou

$$-\frac{(x-x_c)^2}{a^2}+\frac{(y-y_c)^2}{b^2}+\frac{(z-z_c)^2}{c^2}=0$$

Variável negativa: eixo do cone;
(x_c, y_c, z_c) = centro do cone.

Sinal negativo, 0 *na direita, variáveis de grau* 2.

Representação geométrica:



5. Limites e Continuidade para Funções de Duas Variáveis

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Limite representa para quanto tende o valor da função $f(x,y)$, quando o par (x,y) tende para um (x_0,y_0).

a. Limite Fundamental

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = 1$$

b. Continuidade
Se a função é contínua e definida no ponto (a,b), então:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

c. Métodos de Resolução de Limites

I. Aproximação por Diferentes Curvas
Prova que limite não existe ou vale um resultado diferente do esperado:

Se $\lim_{t\to t_0} f\big(\gamma_0(t)\big) \neq \lim_{t\to t_1} f\big(\gamma_1(t)\big)$, não existe limite.

Ou seja, podemos utilizar algumas curvas e substituir x e y na função, calculando o limite; se os valores dos limites forem diferentes, com curvas diferentes, o limite não existe.

Curvas mais utilizadas:

$$\text{Eixo } x\text{: } \gamma(t) = (t, 0)$$

$$\text{Eixo } y\text{: } \gamma(t) = (0, y)$$

$$\text{Reta } y = x\text{: } \gamma(t) = (t, t)$$

Observar graus das variáveis → se existe proporção, utilizar curva com a proporção oposta.

Exemplo:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y}{x^4 + y^2}$$

Proporção dos graus: 2 para 1

Curva sugerida: $\gamma(t) = (t, t^2)$

II. Teorema do Confronto
Prova que limite vale 0:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} h(x, y) = 0$$

Quando:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = 0$$

E:

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \text{ é limitada}$$

Para provar que a divisão de $f(x,y)$ por $g(x,y)$ é limitada, precisamos provar que o numerador é menor do que o denominador, e maior ou igual a zero:

$$0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$$

Portanto:

$$0 \leq \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \leq 1$$

III. Curvas de Nível

Prova que o limite não existe:

$$\text{Se } f\big(\gamma_1(t)\big) = k_1, f\big(\gamma_2(t)\big) = k_2, \text{ e } k_1 \neq k_2$$

$$\lim_{t\to t_1} f\big(\gamma_1(t)\big) = k_1 \neq k_2 = \lim_{t\to t_2} f\big(\gamma_t(t)\big)$$

Se os limites de curvas que geram diferentes curvas de nível são diferentes (ou seja, se um mesmo ponto é capaz de gerar diferentes curvas de nível), não existe limite.

Lista de Exercícios

1. Curvas

P1 2016 Cálculo II Poli USP

Seja C a curva dada pela intersecção dos gráficos das funções $f(x,y) = x^2 - y^2$ e $g(x,y) = 1 - x^2 - 2y^2$.

a. Determine uma parametrização para C.
b. Determine, caso existam, todos os pontos de C nos quais a reta tangente é paralela ao eixo Ox. Escreva a equação da reta tangente em tais pontos.

2. Curvas de Nível

P1 2016 Cálculo II Poli USP

Seja f a função dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2 + 2y^2 + 2x + 4y - 1}{x^2 + x + 2y}$$

a. Determine equações para as curvas de nível c de f quando $c = 0{,}1$ e 2.
b. Faça um esboço das curvas de nível (em linha cheia) e da restrição do domínio (em pontilhado).

3. Curvas

P1 2017 Cálculo II Poli USP

Considere as seguintes curvas:

$$\gamma_1(t) = (t, 2t, 3t^2) \text{ e } \gamma_2(t) = (t, 1, t),\ t \in \mathbb{R}$$

Considere as superfícies abaixo:

$$S_1\colon\ z = y^2 - x^2 \qquad S_2\colon\ z^2 = x^2 + y^2 \qquad S_3\colon\ z^2 = x^2 + y^2 - 1$$

Determine em qual superfície cada curva está contida.

4. Curva de Nível

P1 2017 Cálculo II Poli USP

Considere a curva $\gamma(t) = (\sin t\,, \sec^2 t - 1)$, $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. A imagem de γ está contida na curva de nível:

a. $c = 1$ da função $f(x, y) = y(x^2 - 1)$
b. $c = -1$ da função $f(x, y) = y(x^2 - 1)$
c. $c = -1$ da função $f(x, y) = (y + 1)(1 - x^2)$
d. $c = -1$ da função $f(x, y) = (y + 1)(x^2 - 1)$
e. $c = 0$ da função $f(x, y) = yx^2$

5. Limites e Curva de Nível

P1 2017 Cálculo II Poli USP

Seja f a função dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1}$$

a. Determine o domínio dessa função.

b. Encontre uma equação para as curvas de nível $c = -1$ e $c = 0$ da função f.

c. Existe $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$? Justifique.

6. Limites

P1 2017 Cálculo II Poli USP

Calcule, caso exista:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 + x^3\sqrt[5]{y^6}}{\sqrt{x^4 + y^8}}$$

7. Limites

P1 2017 Cálculo II Poli USP

Calcule, caso exista:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y^2} - 1}{x^2 + y^4}$$

8. Continuidade

P1 2017 Cálculo II Poli USP

Seja f a função abaixo. Decida se ela é contínua nos pontos $(0,0)$ e $(1,1)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \dfrac{\sin(x-y)}{x^3 - y^3}, & se\ x \neq y \\ \dfrac{1}{3}, & se\ x = y \end{cases}$$