www.estudar.com.vc

Resumo e Lista de Exercícios

Cálculo IV

Fuja do Nabo P1 2018.2

Resumo

1. Sequências Numéricas

Uma sequência numérica pode ser definida como um conjunto de números que obedecem uma certa “regra”. Essa “regra” é chamada de **lei de formação da sequência**.

$$1, 2, 4, 8 \ldots \rightarrow a_n = 2^n \rightarrow \text{Lei de formação da sequência}$$

a. Nomenclatura

Uma sequência pode ser escrita da seguinte forma:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

O termo a_n é definido como **termo geral** da sequência e evolui conforme n aumenta. O **índice da sequência**, n, é sempre um número natural.

b. Propriedades

Algumas propriedades interessantes se verificam em sequências:

I. Podemos calcular o limite de seu termo geral a partir de uma **função** definida nos reais (que seja equivalente ao termo geral), ou seja:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

II. Define-se como limite do termo geral o valor do limite de a_n, no infinito. Se existe esse limite, então a sequência é **limitada**.

$$\text{Se existe } L = \lim_{n \to \infty} a_n, \text{ então } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada}$$

III. Uma sequência é **crescente** se o termo seguinte é **maior** do que o atual e **decrescente** se o termo seguinte é **menor** do que o atual.

$$\text{Se } a_{n+1} < a_n, \forall\, n \in \mathbb{N},\ \text{a sequência é decrescente}$$

$$\text{Se } a_{n+1} > a_n, \forall\, n \in \mathbb{N},\ \text{a sequência é crescente}$$

c. Convergência

Uma propriedade importante das sequências é sua **convergência**. Se uma sequência converge para um número L, o termo geral se aproxima cada vez mais de L conforme n aumenta.

Se a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge**, então a sequência é **limitada**:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L, L \in \mathbb{R}$$

Se a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **não é limitada**, então a sequência **diverge**:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \text{ não existe} \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}$$

No entanto, **não basta** a sequência ser limitada para garantir a convergência da sequência.

d. Teorema da Sequência Monotônica (ou Monótona)

Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

I. Se a_n for **crescente** $(a_{n+1} > a_n)$ e **limitada superiormente** $(a_n \leq M, M \in \mathbb{R})$, então a_n é **convergente**;

II. Se a_n for **decrescente** $(a_{n+1} < a_n)$ e **limitada inferiormente** $(a_n \geq M, M \in \mathbb{R})$, então a_n é **convergente**.

e. Princípio da Indução Finita

O **Princípio da Indução Finita** pode ser utilizado para provar que uma sequência é monotônica. Tendo o termo inicial a_1 e uma relação entre os termos seguintes:

I. Começamos provando que a_1 satisfaz determinada condição;
II. Depois, se provarmos que, dado que a_n satisfaz a condição, a_{n+1} também satisfaz essa condição, então todos os termos satisfazem a condição.

2. Séries Numéricas

Uma série pode ser definida como o somatório de todos os termos a_n de uma sequência, indo do primeiro até o último (que corresponde ao infinito). Matematicamente, a série é:

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

a. Propriedades Básicas

O termo a_n é definido como o **termo geral** da série. Ele é utilizado para os estudos de convergência da série.

Uma série pode começar a soma em $n = 1$ se o primeiro termo for nulo ou não entrar na soma, sendo escrita da seguinte forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Uma série é dita **positiva** se seu termo geral a_n é sempre **positivo**, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se o termo a_n é sempre **negativo**, então a série é **negativa**.

b. Convergência

Assim como sequências, as séries podem ser **convergentes** ou **divergentes**.

Uma série **converge** se a soma tende para um número finito e diverge se a soma tende ao infinito ou nunca tende a um mesmo número.

Existem diversos **critérios** que permitem estudar a convergência das mais diferentes séries.

c. Critério do Termo Geral

Se uma série converge, necessariamente o **limite do termo geral** deve ser nulo (para que a soma consiga convergir para um número finito), portanto:

$$\text{Se } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0, \text{ então } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

Vale ressaltar que este critério vale para qualquer série. Outros critérios, como os próximos quatro, funcionam apenas para séries de termos positivos.

d. Critério da Razão

Considere uma série de termos **positivos** $\sum a_n$. O **critério da razão** permite analisar a convergência da série pelo limite da razão entre o **termo seguinte** e o **termo atual**. Seja:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

I. Se $L > 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **diverge**;
II. Se $L < 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **converge**;
III. Se $L = 1$, **nada** pode se concluir sobre a convergência da série.

Esse critério é muito útil quando o termo geral da série possui elementos elevados a n ou fatoriais, como, por exemplo:

$$a_n = \frac{2^n}{3^n n!}$$

e. Critério da Raiz Enésima

Considere uma série de termos **positivos** $\sum a_n$. O **critério da raiz** permite descobrir se uma série converge a partir do limite da raiz enésima de seu termo geral. Seja:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

I. Se $L > 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **diverge**;
II. Se $L < 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **converge**;
III. Se $L = 1$, **nada** pode se concluir sobre a convergência da série.

Este critério, por sua vez, é muito útil quando há um expoente comum do termo geral (normalmente múltiplo ou composto por n), como, por exemplo:

$$a_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$$

f. Critério da Integral
Dada uma série de termos **positivos** $\sum a_n$, com a_n obedecendo as seguintes propriedades:

I. a_n é **decrescente**;
II. O termo de geral de a_n tende a **zero** $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right)$.

O critério da integral permite identificar a convergência de uma série a partir de uma integral imprópria.

Criamos uma função $f(x)$, definida nos reais, de tal forma que $f(n) = a_n$. Assim:

I. Se $\int_1^\infty f(x)dx$ **converge**, a série $\sum_{n=1}^\infty a_n$ **converge**;
II. Se $\int_1^\infty f(x)dx$ **diverge**, a série $\sum_{n=1}^\infty a_n$ **diverge**.

g. Série Harmônica ou Série "p"
Existe uma série que deve ser memorizada: a **série harmônica**, dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}, p \in \mathbb{R}^+$$

Se $p \leq 1$, a série é **divergente**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

No entanto, se $p > 1$, a série é **convergente**.

h. Critério da Comparação
Considere duas séries de termos **positivos**, $\sum a_n$ e $\sum b_n$ (essa última já conhecida). Se, para todo n:

I. $a_n \leq b_n$ e $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ também converge;
II. $a_n \geq b_n$ e $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ também diverge.

O critério é útil quando é fácil comparar o termo geral da série em questão com um de outra série, como a harmônica, cuja convergência é conhecida.

i. Critério da Comparação no Limite
Considere duas séries de termos **positivos**, $\sum a_n$ e $\sum b_n$ (essa última já conhecida). O **critério da comparação no limite** estuda a convergência da série $\sum a_n$ com base no limite da razão entre os termos gerais. Seja:

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

I. Se $0 < L < \infty$, então ambas as séries **convergem** ou ambas as séries **divergem**;
II. Se $L = 0$ e a série $\sum b_n$ **converge**, então a série $\sum a_n$ também **converge**;

III. Se $L = \infty$ e a série $\sum b_n$ **diverge**, então a série $\sum a_n$ também **diverge**.

Esse critério é útil para comparar com séries conhecidas (como as harmônicas), mesmo que a comparação não pareça óbvia.

3. Séries Alternadas

Uma série é definida como alternada se seus termos alternam entre **positivos** e **negativos**, para cada aumento de n.

Matematicamente, ela possui um termo do tipo $(-1)^n$ no termo geral, que assume valores positivos ou negativos dependendo do n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

O expoente do termo alternado (-1) pode ter variações, dependendo se o termo inicialmente é positivo ou negativo.

a. Critério de *Leibniz*

Esse critério, válido apenas em séries alternadas, estuda a convergência da série a partir do **termo geral** (sem o alternado) a_n. Se:

I. O termo a_n **decresce** (ou seja, $a_{n+1} < a_n$);
II. E o limite do termo a_n é **nulo** (ou seja, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$),

Então a série alternada $\sum (-1)^n a_n$ é **convergente**.

b. Convergência Condicional e Absoluta

Por conta do termo alternado, uma série alternada pode ser **divergente**, **condicionalmente convergente** ou **absolutamente convergente**.

A série $\sum(-1)^n a_n$ é **condicionalmente convergente** se ela **converge**, mas a série $\sum a_n$ **diverge**.

Por outro lado, a série $\sum(-1)^n a_n$ é **absolutamente convergente** se ela **converge**, e a série $\sum a_n$ também **converge**.

Portanto, fazemos o seguinte:

Inicialmente, analisamos a convergência da série $\sum a_n$, **sem o termo alternado**, utilizando algum dos critérios de convergência.

I. Se a série $\sum a_n$ **converge**, então automaticamente a série $\sum(-1)^n a_n$ **converge absolutamente**;
II. Se a série $\sum a_n$ **diverge**, realizamos o próximo passo.

Testamos a convergência da série alternada $\sum(-1)^n a_n$ pelo **critério de *Leibniz***.

I. Se a série $\sum(-1)^n a_n$ **converge**, como $\sum a_n$ diverge, a série **converge condicionalmente**;
II. Se $\sum(-1)^n a_n$ **diverge** pelo critério de *Leibniz*, ela é **divergente**.

4. Séries de Potências

Uma série de potências possui uma incógnita $x \in \mathbb{R}$ no termo geral a_n, elevada a uma potência n, como explicitado abaixo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

a. Intervalo de Convergência

O **intervalo de convergência** (ou domínio de convergência) é o conjunto de valores que x pode assumir, tal que a série de potências é **convergente**.

O intervalo de convergência tem centro no ponto x_0 e **raio de convergência** R, tal que a série é convergente se:

$$x_0 - R < x < x_0 + R$$

Os extremos $x_0 - R$ e $x_0 + R$ podem fazer parte do intervalo de convergência, desde que a série seja **convergente** em $x = x_0 - R$ e $x = x_0 + R$.

O intervalo de convergência é encontrado pelo **critério da razão**, mas em **módulo**:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

Com isso, descobrimos o intervalo de convergência, mas **não** descobrimos se os **extremos** do intervalo pertencem a ele.

Portanto, precisamos verificar se a série converge tanto no extremo **inferior** do intervalo, quanto no **superior**.

b. Raio de Convergência

Em alguns casos, é mais rápido calcular o **raio de convergência**, dado pelo seguinte limite:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$

No entanto, perceba que esse limite só pode ser utilizado para calcular o raio de convergência se ele **existir** e for **finito**.

Lista de Exercícios

1. Sequências

P1 2016 Poli USP, Cálculo IV, Exercício 1 Adaptado

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida de forma recorrente, para $n > 1$ e $x_1 = 2$, por:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{3}{x_{n-1}}\right)$$

a. Supondo que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente, calcule seu limite.
b. Prove que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e decrescente.
c. Justifique por que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

2. Critérios de Convergência

P1 2016 Poli USP, Cálculo IV, Exercício 2 Adaptado

Determine para quais valores de $p > 0$ a seguinte série converge ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(3n)}{n^p}$$

3. Critérios de Convergência

P1 2017 Poli USP, Cálculo IV, Exercício 2 Adaptado

Encontre os valores de p para os quais a série abaixo é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$$

4. Séries Alternadas

P1 2017 Poli USP, Cálculo IV, Exercício 3 Adaptado

Determine se cada série a seguir converge absolutamente, condicionalmente ou diverge:

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

b. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^3}$

5. Série de Potências

P1 2017 Poli USP, Cálculo IV, Exercício 4 Adaptado

Para cada $x \in \mathbb{R}$, considere a série abaixo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-4)^n}{3^n n}$$

a. Verifique se a série converge quando $x = 5$, pelo critério de *Leibniz*.

b. Determine o valor da soma da série do item **a**, com erro inferior a 10^{-3}.

c. Determine o raio e o intervalo máximo de convergência da série acima.