estudar.com.vc

Cálculo 1

Resumo e Exercícios P3

Fórmulas e Resumo Teórico

Integrais Imediatas

$$\int dx = x + c$$

$$\int k\, dx = kx + c, \qquad k = cte.$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \operatorname{sen}(\mathrm{x}) dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x) + c$$

$$\int \tan(x)\, dx = -\ln|\cos(x)| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = arcsen(x) + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = arccos(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = arctan(x) + c$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c$$

$$\int \ln(x)\, dx = x \cdot \ln(x) - x + c$$

Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

Se $F(x)$ é uma função derivável em $[a,b]$ e $F'(x) = f(x)$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Segundo Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $F(x)$ uma função tal que:

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

O Segundo Teorema Fundamental do Cálculo garante que:

$$F'(x) = f\big(v(x)\big) \cdot v'(x) - f\big(u(x)\big) \cdot u'(x)$$

Ou, ainda:

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f\big(v(x)\big) \cdot v^{'}(x) - f\big(u(x)\big) \cdot u^{'}(x)$$

Volumes

$$V = \int_a^b A(x)dx,$$

sendo $A(x)$ uma área da seção transversal ao eixo x.

Volumes: Rotação no Eixo x

Há dois métodos:

- Método dos discos:

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

- Método das cascas cilíndricas:

$$V = 2\pi\int_a^b x \cdot f(x)\, dx$$

Volumes: Rotação no Eixo y

$$V = \int_a^b A(y)dy = \pi \int_a^b [f(y)]^2 \, dy$$

Comprimento de Arco

O comprimento de uma curva da função $f(x)$, entre $x = a$ e $x = b$ é L, tal que:

$$L = \int_a^b (\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

Exercícios

1. Integrais Definidas e Indefinidas

PRec 2011

Calcule as seguintes integrais:

a. $\int \frac{\cos(\ln(5x))}{x} dx$

b. $\int (x^2 + 2x) \cdot e^{4x} dx$

2. Integrais Indefinidas

P3 2014

Calcule as seguintes integrais:

a. $\int \ln\,(x^2 + 4x + 5)\, dx$

b. $\int \frac{x^5}{\sqrt{(4 - x^2)^3}} dx$

3. Integrais Definidas e Teorema Fundamental do Cálculo

P3 2015

Calcule as seguintes integrais:

a. Calcule $\displaystyle\int_{3}^{3\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}\,dx$

b. Mostre que o gráfico da função $F\colon\ ]0;+\infty[\ \to R$ dada por

$$F(x) = \int_{1}^{\frac{1}{x^3}} \left(\frac{1}{1+t^4} + t^{-\frac{4}{3}}\right) dt - 3\int_{x}^{0} \frac{t^8}{1+t^{12}}\,dt$$

é parte de uma reta. Determine o coeficiente angular dessa reta.

4. Comprimento de Curvas e Volumes

PSub 2008

A região R está contida no primeiro quadrante e é limitada pela curva

$$y = 1 + \frac{x^2}{2}$$

e pela reta normal a essa curva no ponto (2; 3).

a. Calcule o perímetro de R.

b. Determine o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo Ox.

5. Teorema Fundamental do Cálculo

P3 2009

Determinar, caso exista, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} e^{t^3}\,dt}{\int_0^{x^2} e^{2t^2}\,dt}$.

Gabarito

1.

a. $\text{sen}(\ln(5x)) + c$

b. $\frac{e^{4x}}{32} \cdot (8x^2 + 12x - 3) + c$

2.

a. $(x+2) \cdot \ln(x^2 + 4x + 5) - 2x + 2\arctan(x+2) + c$

b. $\frac{x^6 + 12x^4 - 192x^2 + 512}{-3 \cdot \sqrt{(x^2-4)^3}} + c$

3.

a. A integral é igual a $\frac{1}{27} \cdot \left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)$.

b. A derivada da função é constante. O seu coeficiente angular vale -3.

4.

a. O perímetro de R vale $9 + 4\sqrt{5} + \frac{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)}{2}$.

b. O volume do sólido em questão vale $\frac{364\pi}{15}\ u.v.$

5. O limite é igual a zero.