estudar.com.vc

Cálculo 3

Integrais de Superfície

Resumo e Exercícios P3

Resumo

Integral de Superfície de Campos Escalares

$\iint_S f(x,y,z)d\sigma = \iint_R f\big(S(u,v)\big)|X_u \wedge X_v|dudv$, onde $(u,v) \in R$

Integral de Superfície de Campos Vetoriais

$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}d\sigma = \iint_R F\big(S(u,v)\big) \cdot (X_u \wedge X_v)dudv$, onde $(u,v) \in R$

Teorema de Stokes

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot dr = \iint_S rot\,(\vec{F}) \cdot \vec{n}d\sigma$$

- γ é $fronteira\ de\ S$
- $S \in Dominio\ de\ \vec{F}$
- $Orientações\ obedecem\ regra\ da\ mão\ direita$

Teorema de Gauss

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}d\sigma = \iiint_V div\,(\vec{F})dV$$

- V é $o\ interior\ de\ S$
- $V \in Dominio\ de\ \vec{F}$
- $Superficies\ internas \rightarrow Orientadas\ para\ "dentro"$
- $Superficies\ externas \rightarrow Orientadas\ para\ "fora"$

Exercícios

1. Integrais de Superfície de Campos Escalares

Lista 3- 2017, Questão 3 - c

Calcule $\iint_S \; yzd\sigma$, onde S é a parte do plano $z = y + 3$ limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

2. Integrais de Superfície de Campos Escalares

P3 - 2016, Questão 1-b

Seja S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcule a massa de S sendo a densidade $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$.

3. Integrais de Superfície de Campos Escalares

P3 – 2013, Questão 1-a

Determine a massa da superfície S dada por $z = x^2 + y^2 + 2xy$, limitada por $x^2 + y^2 = \; 2$, sabendo que a densidade é $\delta(x, y, z) = \frac{2x^2+3y^2}{\sqrt{1+8z}}$.

4. Integrais de Superfície de Campos Vetoriais

Lista 3- 2017, Questão 5 – a

Calcule $\iint_S \; \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$, onde $F(x, y, z) = (x^2y, -3xy^2, 4y^3)$, onde S é parte do paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, com $z \geq 0$ orientada de modo que a normal no ponto $(0,0,9)$ é $\vec{k}$.

5. Integrais De Superfície de Campos Vetoriais

Lista 3- 2017, Questão 6-b

Calcule $\iint_S \ x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$, onde S é parte do plano $x + y + z = 2$ no primeiro octante, orientada de modo que a sua normal satisfaça $N \cdot j > 0$.

6. Teorema de Stokes

Lista 3-2017, Questão 10-d

Calcule a $\int_\gamma \ F \cdot dr$ onde $F(x, y, z) = (x + \cos(x^3), y, x^2 - y^2 + z^{100})$ e γ é a fronteira do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ contida no primeiro octante, de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

7. Teorema de Stokes

P3- 2016, Questão 2

Sejam $F(x, y, z) = (2yz, y^3, x + \cos(z^4))$ e γ a interseção entre $z = 9 - x^2 - y^2$ e $y = 1$, percorrida de $\left(-2\sqrt{2}, 1{,}0\right)$ a $(2\sqrt{2}, 1{,}0)$. Calcule $\int_\gamma \ F \cdot dr$.

8. Teorema de Stokes

P3- 2014, Questão 2

Calcule $\int_\gamma \ F \cdot dr$, onde $F(x, y, z) = \left(-\frac{y}{2x^2+y^2} + yz, \frac{x}{2x^2+y^2} - xz, e^{z^2} + z^2\right)$ e γ é a intersecção entre $z = 5 - x^2 - 2y^2$ e $z = 3x^2 + 1$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez no sentido anti-horário

9. Teorema de Gauss

Lista 3 – 2017, Questão 21 - c

Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma$, onde $F(x,y,z) = \left(e^{z^2}\cos(zy^2)\,, x, y\right)$ e S é a parte de $x^2 + y^2 = 1$, limitada por $z = 0$ e $z = y + 3$, e orientada com a normal unitária exterior.

10. Teorema de Gauss

P3 -2014, Questão 3

Calcule $\iint_S y^3 dy \wedge dz + (3yx + \ln(z^2+1))dz \wedge dx + (z^2 - 3xz - x^2)dx \wedge dy$, onde S é a superfície dada por $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, $z \geq 2$, orientada pela normal unitária $\vec{n}$ de tal modo que $\vec{n}\cdot\vec{k} > 0$.

11. Teorema de Gauss

P3 -2013, Questão 3

Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma$, onde $F(x,y,z) = \frac{xi+yj+zk}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z^3}{3}k$, e S é a superfície $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$,orientada pela normal exterior $\vec{N}$

Gabarito dos Exercícios

1. $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$
2. $\frac{4\pi}{3}\left(16 - 11\sqrt{2}\right)$
3. 5π
4. 0
5. 8
6. -1
7. $\frac{64\sqrt{2}}{3}$
8. $-4\sqrt{2}\pi$
9. 0
10. $\frac{1145}{162}\pi$
11. $\frac{92\pi}{5}$