estudar.com.vc

Cálculo Numérico

Resumo e Exercícios P2

Fórmulas e Resumo Teórico P2

Interpolação

- Em um conjunto de n pontos (x_i, y_i), consiste em encontrar uma função f tal que $f(x_i) = y_i$ para todo $i = 1,2, \dots, n$.
- Na prática, f é uma função que "liga os pontos".

Interpolação através de spline linear

Organizando-se os pontos de maneira que os x_i estejam em ordem crescente, a spline linear é uma função interpoladora em que x_i e x_{i+1} são conectados por um segmento de reta.

- Um segmento de reta para cada par de pontos consecutivos
- Para pontos com $x < x_1$, prolonga-se o segmento que liga $x_1 e\ x_2$
- Para pontos com $x > x_n$, prolonga-se o segmento que liga $x_{n-1} e\ x_n$

Interpolação através de polinômio interpolador

- Com n pontos, existe apenas um polinômio interpolador de grau menor ou igual a n-1
  - Por 1 ponto, só existe uma função constante
  - Por 2 pontos, só existe uma reta (ou função constante)
- Forma de Newton (diferenças divididas)

x	y	Δ_1	Δ_2	Δ_3
x_1	y_1			
		$\Delta_{1,2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$		
x_2	y_2		$\Delta_{1,3} = \dfrac{\Delta_{2,3} - \Delta_{1,2}}{x_3 - x_1}$	
		$\Delta_{2,3} = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$		$\Delta_{1,4} = \dfrac{\Delta_{2,4} - \Delta_{1,3}}{x_4 - x_1}$
x_3	y_3		$\Delta_{2,4} = \dfrac{\Delta_{3,4} - \Delta_{2,3}}{x_4 - x_2}$	
		$\Delta_{3,4} = \dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$		
x_4	y_4			

$$p_{int}(x) = y_1 + \Delta_{1,2}(x - x_1) + \Delta_{1,3}(x - x_1)(x - x_2) + \Delta_{1,4}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

- Para mais pontos, o procedimento é o mesmo (montar os Δ utilizando a coluna anterior e os x correspondentes)
- Sempre é possível conferir o resultado verificando se $p(x_i) = y_i$
- Erro no Polinômio Interpolador
    - Usado quando sabe a $f(x)$ que gerou o conjunto de n+1 pontos (x_i, y_i)

$$|f(x) - p_{int}(x)| \leq \frac{max|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} |\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)|, \text{ para x em [a,b]}$$

Integração

- Supondo a integral $\int_a^b f(x)dx$
- Método dos trapézios:
    - $x_i = a + i\frac{(b-a)}{n} = x_0 + ih$
    - $\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + \frac{f(b)}{2}\right) \times h$
    - $|Erro| \leq \frac{\max|f''(x)|(b-a)^3}{12n^2} = \frac{max|f''(x)|(b-a)h^2}{12}$, para x em [a,b]
- Método de n-Simpson
    - Definição de h pode variar, tomar cuidado
        - Motivo: n-Simpson usa 2n espaços
        - $h = \frac{b-a}{n}\ ou\ h = \frac{b-a}{2n}$
        - Usaremos $h = \frac{b-a}{n}$
    - $x_i = x_0 + i\frac{h}{2}$
    - $\int_a^b f(x)dx \approx \left(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + f(b)\right) \times \frac{h}{6}$
    - $|Erro| \leq \frac{\max|f^{(4)}(x)|(b-a)^5}{2880n^4} = \frac{\max|f^{(4)}(x)|(b-a)h^4}{2880}$, para x em [a,b]

Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias

- $\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
- Método de Euler
  - $x_{i+1} \cong x_i + hx'(t_i) = x_i + hf(t_i, x_i)$
- Método de Runge-Kutta de segunda ordem
  - $x_{i+1} \cong x_i + \frac{h}{2}\Big(f(t_i, x_i) + f\big(t_i + h, x_i + hf(t_i, x_i)\big)\Big)$
- Caso tenha uma equação de maior ordem
  - Inserir variáveis auxiliares
  - $\begin{cases} \frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t, x(t), x'(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_0' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = f(t, x(t), y(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = x_0' \end{cases}$
  - Fazer a iteração ao mesmo tempo para $x(t)\ e\ y(t)$

Zeros de Funções

- Para uma função $f(x)$, encontrar $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$
- Método das Aproximações Sucessivas
  - Utiliza princípio do ponto fixo
    - Em uma função $\phi(x)$, se x é ponto fixo, $\phi(x) = x$
    - Usa $\phi(x)$ tal que, se $f(\bar{x}) = 0 \rightarrow \phi(\bar{x}) = \bar{x}$
  - Partir de $f(x) = 0$ e colocar x em evidência de *alguma* maneira
    - $x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x^2 = 3x - 1 \rightarrow x = \sqrt{3x - 1} = \phi(x) = \sqrt{3x - 1}$
    - $x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x(x - 3) = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{x-3} = \phi(x) = \frac{-1}{x-3}$
  - Iterações: $x_{n+1} = \phi(x_n)$
  - Convergência para uma raíz no intervalo [a,b]
    - 1) Existência de raíz: $f(a) \times f(b) < 0$
    - 2) Φ(x) e Φ'(x) continuas em [a,b]
    - 3) $k = \max|\phi'(x)| < 1$ no intervalo [a,b]
    - 4) $x_0 \in [a,\ b]$
    - Se satisfaz as 4 condições, o método converge

- Erro na iteração n
  - $|x_n - \bar{x}| \leq k^n\ (b - a)$
  - $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{k}{1-k} |x_n - x_{n-1}|$
- Método de Newton
  - Caso particular do método das aproximações sucessivas
  - $\phi(x) = x\ - \frac{f(x)}{f'(x)} \rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
  - Convergência
    - Mesmas regras, mas pode simplificar por saber $\phi(x)$
    - 1) $f(a) \times f(b) < 0$
    - 2) $f'(x)\ e\ f''(x)$ continuas em [a,b]
    - 3) $f'(x) \neq 0$
    - 4) $f''(x) \neq 0$
  - Erro na iteração n
    - Convergência monótona decrescente
      - Se $\phi(x_n - \epsilon) > x_n - \epsilon$, então $x_n - \epsilon$ é uma aproximação de $\bar{x}$ com erro menor ou igual a ε
    - Convergência monótona crescente
      - Se $\phi(x_n + \epsilon) < x_n + \epsilon$, então $x_n + \epsilon$ é uma aproximação de $\bar{x}$ com erro menor ou igual a ε
    - Convergência alternada
      - Se $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon, x_n$ é uma aproximação de $\bar{x}$ com erro menor ou igual a ε

Exercícios

1. Interpolação

(P2 de 2016 – Questão 4 Adaptada)

a. Interpole a função $x(t) = e^{2t} + e^{-2t}$ por um polinômio de grau menor ou igual a 3 nos pontos $t_i = i * h, i = 0, \dots, 3, h = 0.2$.

b. Use o polinômio do item (a) para estimar o valor de $x(0.5)$ e estime o erro cometido. Compare sua estimativa com o erro efetivamente cometido.

c. Estime o erro que se obteria usando os polinômios de grau menor ou igual a 2 possíveis com os pontos do item a) e estime o valor de $x(0.5)$ com o melhor deles.

2. Integração

(P3 de 2014 – Questão 3 Adaptada)

a. Calcule o valor de $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ pelo método dos trapézios com espaçamentos $\pi/2, \pi/4, \pi/8$.

b. Estime o valor do erro obtido com o espaçamento $h = \pi/8$ e compare com o erro efetivamente obtido. Qual deveria ser o valor de h de forma a garantir erro menor que 0.0025?

c. Calcule o h necessário para garantir erro menor que 0.0025 utilizando o método de n-Simpson $\left(h = \frac{b-a}{n}\right)$.

3. Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias

(P2 de 2016 – Questão 2 Adaptada)

a. Considere a equação diferencial $x''(t) - 4x(t) = 0$, com condições iniciais $x(0) = 2$ e $x'(0) = 0$, cuja solução exata é $x(t) = e^{2t} + e^{-2t}$. Escreva a equação como um sistema de EDO's de primeira ordem nas variáveis

$x(t)$ e $y(t) = x'(t)$ e utilize o método de Euler com passo $h = 0.25$ para aproximar a solução em $t = 0.5$.

b. Faça o mesmo com o método de Euler Modificado com passo $h = 0.5$. Compare os resultados obtidos com o valor da solução exata.

Método de Euler modificado para $x'(t) = f\big(t, x(t)\big)$:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}\Big(f(t_i, x_i) + f\big(t_i + h, x_i + hf(t_i, x_i)\big)\Big)$$

4. Zeros de Funções

(P1 de 2010 – Questão 4)

Um tanque esférico de raio 1m apoiado em uma superfície horizontal plana é usado para armazenar um produto líquido. Determine, com um erro de 1cm, qual é a altura do líquido em relação à superfície quando ele ocupa 1/4 do volume do tanque. Explique suas contas.

Gabarito

1.

a. $p_{int}(t) = 1.732(t-0.4)(t-0.2)t + 4.382(t-0.2)t + 0.811t + 2$

b. $p_{int}(0.5) = 3.08868$

$|f(0.5) - p_{int}(0.5)| \leq 0.00362$

c.

Pontos	$\lvert \boldsymbol{Erro_{estim}} \rvert$
0,0.2,0.4	0.0355
0,0.2,0.6	0.0604
0,0.4,0.6	0.0201
0.2,0.4,0.6	0.0121

$p_{int}(0.5) = 3.0939$

2.

a. $h = \pi/2 \to 0.7854$

$h = \pi/4 \to 0.9481$

$h = \pi/8 \to 0.9871$

b. $Erro_{estim} \leq 0.0202$

$h < 0.1381$

c. $h < 1.4632$

3.

a. $x(0.5) = 2.5$

b. $x(0.5) = 3$

4. Resposta exata: $h = 0.6527m = 0.65 \pm 0.01m$