www.estudar.com.vc

Probabilidade

Variáveis aleatórias multidimensionais

Formulário e exercícios P3

Distribuições Unidimensionais

Discretas

Binomial

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Poisson

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Geométrica

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1}p$$

Continuas

Uniforme

$$f(x) = \begin{array}{l} 0, x < a \\ 0, x > b \\ \dfrac{1}{b-a}, a \leq x \leq b \end{array}$$

Exponencial

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$$

Normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Distribuições Multidimensionais

Para situações que mais de um resultado é observado em um experimento, daqui para frente, trabalharemos com apenas duas variáveis.

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots)$$

Probabilidades marginais

Se tivermos a distribuição multidimensional é possível retirar a distribuição unidimensional

$$P(X_1 = x) = \sum_{x_2} P(X_1 = x, X_2 = x_2)$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(y) \cdot dy$$

Independência

Podemos dizer que duas variáveis são independentes se:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$
$$f_{xy}(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

Distribuições condicionais

Apenas outra forma de descrever mais de uma variável:

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

Os: se as variáveis são independentes

$$P(X = x|Y = y) = P(X = x)$$

Esperança condicional

$$E[X|Y=y]=\sum_{x} x\cdot P(X=x|Y=y)$$

Note que está em função de y

Media de uma função sobre X e Y

Considere h(X,Y) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$e queremos saber o valor de E[h(X,Y)]

$$E[h(X,Y)]=\sum_{x\in X}\sum_{y\in Y} h(x,y)\cdot P(X=x,Y=y)$$

Covariância e correlação de X e Y

$$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]$$
$$Cov[aX,bY]=ab\ Cov[X,Y]\ (a>0,b>0)$$
$$\rho[X,Y]=\frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y}$$
$$\rho[aX,bY]=\rho[X,Y]\ \ (a>0,b>0)$$
$$\rho[-X,Y]=\ \rho[X,-Y]=\ -\rho[X,Y]$$
$$-1\leq\rho\leq 1$$
$$\rho[X,X]=1$$

Teorema do limite central

O que preciso saber se:

$$X\ =N(\mu_x,\sigma_x)$$
$$Y\ =N(\mu_y,\sigma_y)$$

$$W\ =aX+bY$$
$$W\ =N(\mu_W,\sigma_W)$$
$$\mu_W\ =\ \mu_X+\mu_Y$$
$$\sigma_W^2=\sigma_X^2+\sigma_Y^2$$

Exercícios

1. Variáveis multidimensionais discretas, probabilidade condicional

Se X e Y são variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson com parâmetros λ_1 e λ_2. Calcule P(X=k|X+Y=n)

2. Teorema Limite Central

A pontuação de Aldo no boliche é normalmente distribuída com esperança 170 e desvio padrão 20, enquanto a de Bruno é normalmente distribuída com esperança 160 e desvio padrão 15. Se ambos jogam um jogo casa, e supondo que as pontuações obtidas sejam independentes, determine:

a. A probabilidade de que a pontuação de Bruno seja menor que a de Aldo

b. A probabilidade de que o total de pontos supere 350

3. Covariância

Uma urna contem 3 bolas vermelhas e duas bolas pretas. Seja X o numero de bolas vermelhas e Y o numero de bolas pretas. Calcular a covariância $Cov[X, Y]$

Gabarito

1. $\binom{n}{k}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$

2.

a. 0,6554

b. 0,2119

3. $-\frac{9}{25}$